Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire.

Janine Rogalski

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE: **DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES**

PRESENTEE PAR: ROGALSKI - MURET Janine

SUJET de la THESE

Acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge scolaire et préscolaire.

soutenue le. 1984 devant la commission d'examen

JURY:

A. REVUZ

H. FREUDENTHAL

Y. AMICE

J. BENABOU

P. GRECO

G. VERGNAUD

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur André Revuz pour sa direction à la fois bienveillante et critique, et pour l'appui qu'il m'a assuré tout au long de l'élaboration et de la réalisation de cette thèse.

Je voudrais dire ici à Gérard Vergnaud combien je lui sais grè de m'avoir convaincue de travailler dans le domaine de la didactique des mathématiques, d'avoir contribué à ma formation non seulement par l'apport de sa réflexion théorique mais aussi par l'enthousiasme dans le travail et la discussion.

L'accueil dans le laboratoire de Monsieur François Bresson, les échanges fructueux sur le développement cognitif de l'enfant ont déterminé l'engagement de ce travail. La collaboration étroite avec Liliane Maury a permis son enrichissement.

Les analyses théoriques et critiques de Pierre Gréco m'ont été précieuses pour la mise en rapport du cadre de l'épistémologie génétique piagétienne et de la problèmatique de la didactique.

L'interaction avec la communauté de didactique des mathématiques a contribué de façon décisive à l'évolution de la problèmatique de mes recherches sur la bidimensionalité.

Non didacticien mais concerné par l'enseignement de sa discipline, Jean Benabou a porté à ce travail beaucoup d'attention et des points de vue non conventionnels, ce dont je le remercie.

Je remercie Monsieur Freudenthal et Madame Amice d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Par sa fermeté amicale mais rigoureuse, Aline Robert a su me faire respecter un rythme régulier de rédaction: tâche difficile pour laquelle j'ai beaucoup apprécié sa détermination.

Je remercie également Renan Samurçay pour ses encouragements et l'aide qu'elle m'apportée.

Je voudrais enfin remercier Catherine Lavigne pour l'efficacité avec laquelle elle a su déchiffrer mes pages manuscrites, tous ceux et celles qui ont permis la réalisation concrète de cette thèse, en soulignant la gentillesse avec laquelle Madame Dieraert m'accueillie.

S O M M A I R E

(Les différentes parties ont une pagination indépendante)

..page

INTRODUCTION

0.Les éléments d'un cadre didactique V

0.1. Le sujet V

0.2. Le savoir VI

0.3. L'enseignement VI

1.Le cadre piagétien de l'épistémologie génétique ..VIII

1.1. La construction de la connaissance ..VIII

1.2. Fonction symbolique, représentations, invariants opératoires X

2.Domaine de validité des opérations cognitives ..XIII

3.Le statut social de la connaissance ...XVI

4.Les mathématiques,sciences d'action .XVIII

5.La notion de champ conceptuel ...XXI

6.Les systèmes de représentation du sujet ..XXIV

6.1. Systèmes de représentations, règles d'action ..XXIV

6.2. Place des systèmes de représentations dans l'étude des situations problèmes et des situations didactiques ..XXIX

7.Schéma des rapports internotionnels ..XXXI

PARTIE I. Problèmatique générale.

Chapitre 1: objets de savoir du sujet, objets mathématiques, objets d'enseignement

0.Statut de l'acquisition des connaissances sur la dimensionalité par rapport aux champs de savoir et à l'enseignement 3

0.1. Dimensionalité et produit cartésien 3

0.2. Place de la dimensionalité dans la connaissance sur le monde 4

0.3. La "double articulation" des connaissances logico-mathématiques 5

0.4. Pourquoi la centration sur les rapports aux mathématiques? 6

0.5. Relations entre les connaissances du sujet sur la dimensionalité, les objets de savoir mathématiques et l'enseignement 7

1.La multiplication des dimensions 8

1.1. Genèse des notions 8

1.2. L'objet de savoir en jeu 13

1.3. Intervention de l'enseignement 16

2.Le repérage du plan 19

3.Les mesures spatiales 25

Chapitre 2: objectifs et méthodologie générale

1.Les objectifs: niveau général, premiers aperçus méthodologiques 34

2.Les objectifs concernant le produit cartésien ensembliste, méthodologie associée 39
2.1. Propriétés fonctionnelles 41
2.2. Domaine de validité des invariants étudiés 42
2.3. La méthodologie 44
3.Repérage dans le plan, bidimensionalité spatiale, bidimensionalité ensembliste 48

4.La bidimensionalité des mesures spatiales 54

Annexes 55
Index de quelques termes 73

PARTIE II. Combinatoire de dimensions.

1.Classification des tâches sur le produit cartésien, description des expériences, méthode de présentation et d'analyse des résultats 3

2.Comparaison du produit hétérogène et du produit homogène (CxF , CxC) 17

3.Caractères d'exhaustivité et d'unicité dans les constructions du produit CxF 22
3.1. Réussites aux tâches de construction de CxF 23
3.2. Analyse des procédures de construction 24
Annexe 30

4.Dénombrements, adjonctions,rangements 39
4.1. Réponses numériques 39
4.2. Rangements 43

5. Rapports interdimensionnels 53
5.1. Les rapports interdimensionnels dans le matériel "cartes" 53
5.2. Rôle des dimensions F et C dans le matériel "plots" 55
5.3. Rapports interdimensionnels dans le matériel "mouchoirs" 58

6. Relation entre la négation et l'identité chez l'enfant et la consigne d'unicité utilisée dans la construction du produit 60
6.1. Produit cartésien et complément: étude génétique des conduites dans des situations de produit 63
6.2. Comparaison des réponses 82

7. Construction des produits homogènes 86
7.1. Construction du produit homogène CxC: matériel "maisons" 86
7.2. Comparaison des constructions et adjonctions pour CxC et FxF 94

8. Mises en correspondances de dessins (F'xC') et de plots (FxC) ...113
8.1. Paradigme général ...113
8.2. Présentation des "plots" et "dessins"...115
8.3. Analyse de la situation expérimentale ...118
8.4. Résultats expérimentaux ...121
8.5. Mobilisation d'hypothèses bi- ou unidimensionnelles ...126

9. Mise en correspondance de timbres et de plots ...129
9.1. Déroulement de l'expérience,

épreuves et consignes, description des réponses ...132
9.2. Résultats d'ensemble ...138
9.3. Analyse des changements de critère dans les divers groupes d'âge ...141
9.4. Bilan des résultas ...149

10. Mise en correspondance d'étiquettes (FxC) et de dominos (Ag x Ad) ...154
10.1. Matériel expérimental ...155
10.2. Déroulement de l'expérience ...156
10.3. Mode d'analyse des résultats ...159
10.4. Résultats d'ensemble ...161
10.5. Conclusion ...169
Annexe: un modèle de réponses ...171

11. Mise en correspondance de boites (Cg x Cd) et de dominos (Ag x Ad) ...198
11.1. Matériel expérimental ...200
11.2. Sujets ...203
11.3. Analyse des résultats d'ensemble ...203
11.4. Analyse sujet par sujet ...209
11.5. Interprétation et discussion des résultats ...223

12. Conclusion ...225
12.1. Etude du "cortège" des propriétés associées à un produit AxB ...225
12.2. Hypothèses sur les représentations des enfants du point de vue de la dimensionalité ...232
12.3. Peut-on agir sur l'évolution des acquisitions sur la dimensionalité? ...235

PARTIE III.Repérage plan.

1.Description des dispositifs expérimentaux; méthode d'analyse des réponses 2

1.1. Repérage spatial 2

1.2. Repérage "déspatialisé" 8

1.3. Les sujets 11

1.4. Méthode d'analyse des résultats 11

2.Comparaison globale des réussites 18

2.1. Evolution des réponses 18

2.2. Comparaison des situations 21

3.Invariants spatiaux: topologiques, affines et métriques 29

3.1. Analyse des erreurs topologiques 30

3.2. Répartition des erreurs topologiques et affines selon les catégories de points 32

3.3. Analyse de l'ensemble des réponses selon la catégorie des points (situation avec changement de point de vue compensable) 32

4.Invariants dimensionnels 36

4.1. Réponses "unidimensionnelles" 37

4.2. Statut des directions "horizontale" et "verticale" 38

5.Invariants d'orientation 45

5.1. La symétrie "en miroir" 45

5.2. Conservation de l'orientation gauche/droite dans les situations avec changement de point de vue compensable (côte à côte) 47

5.3. Interaction de la conservation de l'orientation et des autres invariants spatiaux 48

5.4. Etude individuelle de sujets de maternelle 49

5.5. Etude d'un modèle de réponses 51

5.6. La conservation de l'orientation gauche/droite est-elle liée aux positions respectives du sujet et de l'expérimentateur? 54

5.7. Conclusion sur l'orientation 56

6.Etude de la situation "déspatialisée" d'identification des carrefours; effets ultérieurs sur le repérage 58

7.Conclusion 62

7.1. Bidimensionalité du repérage plan 62

7.2. Bidimensionalité et changements de point de vue 65

7.3. Bidimensionalité spatiale/ bidimensionalité ensembliste 67

PARTIE IV.Mesures spatiales.

1.Les mesures spatiales: un champ conceptuel complexe où les questions multiplicatives jouent un rôle déterminant 4

2.Méthodologie et dispositif expérimental 10

3.Bilan des résultats d'ensemble 23

3.1. Comparaison globale des opérations sur les mesures de longueur et de surface 24

4.Acquisition de l'unidimensionalité de la mesure de longueur 26

4.1. Réponses correctes et effets du mode opératoire 27

4.2. Comparaison des réponses selon le caractère rectiligne ou curviligne de la figure 27

5.Acquisition de la bidimensionalité de la mesure de surface 29

5.1. Classification des réponses et analyse des résultats d'ensemble 29

5.2. Disponibilité et mobilisation des représentations 35

5.3. Domaine de validité des opérations du sujet 39

5.4. Effets du mode opératoire 43

5.5. Organisation de la situation problème et transformation de la tâche 44

6.Conclusion 49

Annexes

1. Le modèle linéaire: fiablité du fonctionnement cognitif 52

2. Les rapports entre mesures spatiales 56

PARTIE V.Analyse macroscopique de l'enseignement.

1.Multiplication et produit ensembliste

1.1. avant la réforme des années 70 4

1.2. après la réforme 7

2.Repérage plan

2.1. avant la réforme 9

2.2. après la réforme 9

3.Les mesures spatiales
3.1. Le modèle linéaire et son évolution 11
3.2. Le rapport entre modèle linéaire et mesure 15
3.3. Les questions d'arithmétisation 18

4.Liens entre les divers domaines de l'enseignement sur la multiplication, le repérage plan et la mesure 19

5.Conclusion 20

6.Bibliographie; manuels consultés 21

CONCLUSION ET PERSPECTIVES pages I à XIII

Bibliographie pages 1.....12

Annexe: dimension(s); dimensionnel; dimensionalité 1
1. La "dimension" en mathématique 2
2. Les "dimensions" de la physique 5
3. Les "dimensions" en psychologie 6
4. En conclusion 9
5. Bibliographie spécifique 11

I

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le but du travail rapporté ici est de contribuer aux connaissances sur le développement cognitif dans le domaine logico-mathématique et sur l'acquisition par les enfants et les élèves de notions relatives au produit cartésien.

Entre le moment où l'enfant est capable d'utiliser localement une propriété, une relation entre objets ou situations, et celui où il peut travailler de façon multiplicative sur des ensembles ou des relations, se déroule un long processus de construction et de structuration des connaissances.

C'est ce processus dont nous cherchons à marquer des états (ou des étapes) pour, ultérieurement, construire des hypothèses qui rendent compte de l'évolution entre ces états, l'objectif visé étant la connaissance du processus en tant que tel.

Il n'y a pas à l'heure actuelle de théorie de l'acquisition des connaissances qui donne des outils d'analyse des processus d'appropriation cognitive qui soient à la fois généraux - et fournissent donc un cadre conceptuel d'ensemble - et que l'on puisse mettre en oeuvre de manière opératoire dans des situations particulières sur des points précis.

Avant de situer notre problématique dans un cadre général, auquel se référeront les concepts utilisés, nous allons spécifier les types de problèmes abordés et délimiter implicitement par là-même le domaine de validité de nos conclusions.

Trois champs de problèmes seront étudiés : la combinatoire des dimensions (forme et couleur par exemple), le repérage avec des coordonnées cartésiennes (dans un réseau fini), les mesures spatiales de surface (dans le plan). La combinatoire, le repérage spatial, la mesure sont tous des activités - ou des problèmes - à travers lesquels l'enfant se construit une connaissance sur "le monde". Par ailleurs, une même structure intervient dans la modélisation de telles situations : celle de produit cartésien.

Pour la combinatoire, de formes et de couleurs par exemple, le produit : {ensemble des valeurs prises par la forme} x {ensemble des valeurs prises par la couleur}, représente la collection des objets considérés du point de vue de ces deux dimensions forme et couleur.

Dans le repérage du plan cartésien, avec par exemple un repère "horizontale"/"verticale", le produit : {ensemble des valeurs des coordonnées horizontales} x {ensemble des valeurs des coordonnées verticales}, représente les points du plan R2 ou d'un sous-ensemble IxJ du plan qui est un réseau fini si les deux ensembles de valeurs sont finis.

Enfin, les mesures spatiales de surface et de volume sont des produits de mesures. En particulier la surface est un produit de mesures de longueurs explicité dans l'équation aux dimensions : S = L x L.

Pour analyser dans un même cadre conceptuel spécifique l'évolution des processus cognitifs qui peuvent orienter l'activité de l'enfant dans ces différents domaines nous faisons intervenir la notion de dimensionalité. Expliquons-nous.

Choisir des objets en fonction de leur couleur (par exemple), repérer des points en fonction de leur éloignement dans une certaine direction, mesurer une longueur sont des opérations qui ont en commun leur "unidimensionalité" : une seule propriété, une seule relation, une seule quantité sont en jeu dans chacune des situations.

Combiner des dimensions forme et couleur, coordonner deux repérages sur deux axes indépendants, traiter une quantité comme une mesure produit sont toutes des opérations qui ont en commun leur "bidimensionalité".

Il nous faut souligner ici que le terme de "dimension" est polysémique, qu'il renvoie aujourd'hui à des domaines scientifiques différents ; mais les significations que ce terme peut recevoir en mathématiques, en physique, en psychologie, ne sont ni conceptuellement, ni historiquement indépendantes. Nous développerons en annexe de ce chapitre quelques éléments sur l'utilisation de ce terme de "dimension" ; nous pouvons dire schématiquement que la dimension (1), concept mathématique, caractérise, d'un certain point de vue, des espaces ou des sous-espaces, que dans des textes de psychologues la forme - par exemple - apparaît comme une dimension dans l'analyse des objets lors de l'étude de "l'acquisition des concepts", et que la longueur apparaît comme dimension en physique dans l'analyse dimensionnelle des rapports entre grandeurs.

Cependant, malgré des significations a priori distinctes, il existe des invariants qui vont dans le sens d'une communauté conceptuelle de ces significations particulières. En effet, pour se limiter au cas de la bidimensionalité, il existe dans tous les cas le modèle commun du produit cartésien ; dans tous les cas aussi l'arithmétisation (le passage au domaine du calcul avec des nombres) conduit à une même structure numérique multiplicative.

La dimensionalité sera pour nous, de fait, un concept de base dans notre description des situations étudiées et surtout dans l'analyse des opérations effectuées par les enfants et élèves dans les différentes tâches que nous leur présentons ; d'où le titre même de ce travail : "acquisition de la bidimensionalité (combinatoire, espace, mesure) chez les élèves d'âge préscolaire et scolaire".

---

(1) Au début de ce siècle, et souvent encore dans les manuels scolaires actuels, l'espace euclidien représentant l'espace physique classique était "à trois dimensions" (et non "de dimension 3"). L'usage au singulier du terme dimension rejoint l'utilisation que nous faisons ici du terme dimensionalité qui se réfère à des propriétés communes de systèmes modélisables en produits.

0 - LES ELEMENTS D'UN CADRE DIDACTIQUE

Notre objet de recherche concerne des notions qui, si elles font partie d'un "développement cognitif spontané", participent également de l'enseignement des mathématiques.

Une étude de leur acquisition doit donc se situer par rapport à un cadre théorique d'ensemble qui puisse prendre en compte, au plan des concepts et des méthodes, le fait qu'on aborde en quelque sorte un "problème à trois corps" : le sujet, le savoir, l'enseignant.

0.1. Le sujet

Le sujet dont on étudie les acquisitions cognitives peut être considéré de deux points de vue : comme enfant (ou adolescent, ou adulte le cas échéant) situé dans un certain milieu où s'exercent ses activités, et comme élève (ou étudiant) inséré de façon institutionnelle dans la classe (pour le système d'enseignement dominant actuel). Ces deux points de vue sont étroitement dépendants : un élève, disons : dans l'enseignement obligatoire, est simultanément enfant ou adolescent, et l'enfant est - du fait de sa scolarisation obligatoire - un élève pour une part considérable, voire dominante, de son temps actif.

Il nous paraît néanmoins nécessaire de les différencier, sur le plan conceptuel, au moins dans un premier temps : les relations spécifiques introduites par l'institution scolaire à l'intérieur de la classe doivent pouvoir, à un moment de la recherche, être prises en compte ès qualités. Elles insèrent en effet les élèves dans un cadre "socio-cognitif" ou "collectivo-cognitif" dans lequel les "pairs" sont - a priori tout au moins - dans une même situation par rapport au maître, quant à l'objet commun en jeu : le savoir.

0.2. Le savoir

Le savoir quant à lui peut, de manière schématique, être référé à un champ de connaissances social, historique, et intégré dans des pratiques professionnalisées (celles de l'ingénieur, du mathématicien, de l'économiste, etc.) ; il est également lié à des pratiques individuelles dans divers lieux des activités matérielles et sociales, dont font partie les activités de l'enfant.

Par rapport à un savoir qui se réalise dans une pratique précise, localisée dans son temps et dans son objet, le savoir historiquement constitué en champ de connaissances est décontextualisé : à un niveau très élémentaire 2 + 3 = 5 est un savoir distinct de celui du jeune enfant qui réunit 2 billes avec 3 billes et trouve "j'ai 5 billes". Le calcul d'une surface obtenue par un élève en additionnant deux surfaces partielles (par exemple deux demi-triangles rectangles pour obtenir un triangle quelconque) ne fonctionne pas au même niveau que l'additivité de la mesure pour des ensembles dont l'intersection est de mesure nulle : pour l'élève de CM2 ou 6ème, la question de la mesure de la frontière n'est pas posée.

0.3. L'enseignant

Il occupe une place déterminée dans le système institutionnel scolaire, place qui définit un rapport à la classe et à l'élève différent de celui qui peut exister entre un enfant et quelqu'un qui lui apprend, même intentionnellement, quelque chose.

Le système institutionnel qui fonctionne avec des niveaux emboîtés (Chevallard, 1980), donne au maître une place de pivot puisqu'il est le décideur des choix qu'il est conduit à faire tout au cours du déroulement du temps de la classe. Il n'est pas seulement celui qui sait (par rapport à l'élève qui ne sait pas) mais celui qui sait ce qui viendra après, dans un temps scolaire organisé et long. Le traitement des situations - problèmes effectivement présentés à l'élève, cette orientation par ce qui sera fait ultérieurement en classe détermine (consciemment ou non) des choix quant aux interventions des élèves qui seront retenues, et quant aux solutions éventuelles qui seront validées par le maître.

Nous n'avons pas pris en compte à propos de la dimensionalité l'ensemble de ce problème "à trois corps" qui est le coeur de la didactique. En effet, le statut de l'acquisition des connaissances sur la dimensionalité par rapport à l'enseignement donne une place centrale aux rapports entre le sujet et le savoir (à l'exception-pour partie - des mesures spatiales). Le maître met en forme des acquis extérieurs à ses projets explicites d'enseignement et introduit des codages nouveaux : il n'agit pas directement sur la construction de la connaissance conceptuelle. (Cf. Chapitre sur l'enseignement).

Pour la construction du produit cartésien comme pour le repérage plan, il n'y a pas d'enseignement explicite dans la période où ont lieu les acquisitions que nous étudions. Donc nous n'avons pas eu à prendre en compte l'interaction avec l'enseignant. Nous préciserons dans le chapitre sur l'enseignement quels sont exactement les objets enseignés en rapport avec ces problèmes, le moment et la forme de ces interventions, compte tenu ou non des acquis antérieurs extrascolaires des enfants.

°

° °

1 - LE CADRE PIAGETIEN DE L'EPISTEMOLOGIE GENETIQUE

La théorie de Piaget sur le développement des connaissances nous offre un cadre conceptuel général pour prendre en compte les rapports entre le sujet et la connaissance, c'est-à-dire une partie - décisive selon nous - du problème à trois corps : sujet/savoir/enseignant.

En effet, les grands concepts théoriques de l'épistémologie génétique piagétienne se sont avérés d'une très grande productivité dans la recherche sur le développement cognitif ; ils nous paraissent d'autre part susceptibles de s'intégrer, à terme, dans une théorie didactique qui fasse toute sa place au sujet. Néanmoins nous nous séparerons de certaines conclusions "piagétiennes" concernant en particulier les stades opératoires, la place du contenu et celle de l'école.

1.1. La construction de la connaissance

1.1.1. Un premier point clé concerne les rapports de l'action et de la connaissance : il s'agit de la thèse de la construction de la connaissance comme résultat d'un processus d'interaction entre le sujet et le milieu, processus qui produit un système de connaissances organisées et ne peut se réduire à une simple accumulation.

Pour expliciter schématiquement ce point, nous allons séparer comme moments distincts des éléments qui appartiennent au triplet /accomodation, assimilation, équilibration/. Par ses actions (réelles : sur le monde physique, mais aussi intériorisées) le sujet élabore des instruments de connaissances, des concepts (1) ou modifie ses représentations. C'est le phénomène d'accomodation au réel.

---

(1) Ces concepts ont le double statut d'outil implicite ou explicite d'action sur la réalité, et d'objet reconnu par une communauté culturelle : par exemple, la <u>forme</u> intervient comme instrument de classification et comme objet culturel de description du réel.

Réciproquement, la "lecture" des transformations effectuées, les interrogations posées par le sujet sur l'objet organisent le réel : il y a processus d'assimilation (de la part du sujet).

Le moteur de l'évolution des systèmes de connaissances est contenu dans le double jeu de l'accomodation et de l'assimilation. Dès que l'action du sujet conduit à une connaissance sur l'objet, celui-ci peut se transformer : de nouvelles questions peuvent se poser à propos de cet objet et sur ces rapports avec d'autres.

Des contradictions peuvent surgir aussi bien des nouvelles questions devenues possibles que de la confrontation de la nouvelle connaissance avec les anciennes.

Un second point clé porte sur la dynamique de ce jeu accomodation/ assimilation. Les notions de <u>déséquilibre</u> et d'<u>équilibration</u> traduisent sur le plan théorique l'idée que "le modèle" (...) que se forme un sujet pour une situation dépend des faits qu'il prend en considération et que simultanément et réciproquement les faits qu'il retient dépendent du modèle auquel il peut faire appel (Cf. Vergnaud, 1981, p. 13).

Le processus d'équilibration conduit à déterminer à la fois le modèle (plus ou moins "local" par rapport à la situation) et les opérations que le sujet met en oeuvre. Bien entendu il ne s'agit pas d'un déterminant unique : l'investissement du sujet dans la situation peut jouer un rôle considérable).

Il faut préciser que nous prenons les termes d'<u>objet</u> et d'<u>action</u> en un sens large qui contient aussi bien l'action matérielle élémentaire sur un objet proprement dit ("lâcher un jouet" par exemple) que l'organisation d'une expérimentation sur un système (comparer les effets sur le volume de diverses transformations selon leur variation, ou leur continuité).

1.1.2. Concernant l'épistémologie, Piaget introduit la notion de <u>dépassement interne</u> d'un système, qui nous paraît pertinente pour la conception de situations didactiques : "la notion même de dépassements internes est une notion dialectique /.../ (elle) [la construction de la connaissance] implique l'apparition continuelle d'oppositions à surmonter et de synthèses à effectuer [...] (car) l'objet existe mais se modifie : il se modifie en fonction de deux facteurs complémentaires. Le premier est que l'objet ne se présente pas sur un seul plan [...], le second est que si l'objet se modifie et si ses modifications ne sont atteintes qu'à travers les coordinations du sujet, celui-ci s'élabore en fonction des éléments matériels ou intériorisés qu'il façonne pour agir sur l'objet". (Piaget, 1967, p. 1260 sq).

Nous voyons, dans ces lignes écrites à propos des courants de l'épistémologie scientifique, des questions au coeur de la didactique : on n'étudie pas en effet le processus d'enseignement et d'acquisition des connaissances mathématiques sans un modèle - fut-il flou et implicite - de ce qu'est le savoir. Or les conceptions que nous présenterons brièvement plus loin et que résument assez bien l'injonction de Lebesgue "le professeur de mathématiques doit être un professeur d'action", nous semblent s'intégrer "naturellement" à ces notions que Piaget a développées.

1.2. Fonction symbolique, représentations, invariant opératoire

1.2.1. Un autre point clé dans la théorie Piagétienne touche à la fonction symbolique : le processus d'intériorisation des actions (et donc, en particulier de représentation du réel) permet un dépassement de l'action matérielle sur un objet présent en un lieu et en un temps donnés (1), il caractérise la pensée conceptuelle.

---

(1) Un processus de décontextualisation est déjà à l'oeuvre dans l'intériorisation, au sens où l'objet - et plus largement la situation - est détaché de son cadre spatio-temporel.

Différents systèmes de signes en constituent une transcription matérielle : langage parlé et écrit, schémas, graphismes, codes spécifiques. Ces systèmes - ces signifiants - contribuent à l'efficacité opératoire des représentations et permettent de "calculer" donc d'anticiper des résultats comme de déterminer des possibles.

Nous nous référons au concept piagétien d'intériorisation lorsque nous parlons de représentation du sujet ou de "modèle" (pour le sujet).

1.2.2. Enfin le concept d'invariant opératoire joue pour Piaget un rôle fondamental dans la dynamique du développement cognitif. Les recherches piagétiennes sur la conservation du nombre, des quantités continues, des longueurs, surfaces et volumes, etc. sont bien connues. On sait aussi l'impact qu'a eu en psychologie génétique le métaconcept de conservation, révélateur du développement opératoire. En fait la place théorique que nous assignons aux concepts d'invariants opératoires et de conservations reprend l'orientation des travaux piagétiens portant sur l'épistémologie génétique de champs de connaissances spécifiques : nombre, espace, quantités physiques (1).

Or dans ce cadre, l'existence de "décalages horizontaux" dans les conservations pose de sérieux problèmes théoriques. Il y a "décalage horizontal" lorsque certaines conservations sont acquises à des moments très différents du développement, alors que les notions correspondantes ne dépendent pas les unes des autres). D'une manière analogue les sériations sont considérées comme le résultat d'opérations logiques s'appuyant sur un invariant lié à l'ordre. Or l'existence d'une transitivité précoce (eu égard à l'ensemble des études sur la sériation) observée par de Boysson-

---

(1) Ces textes ont été publiés de 1941 à 1950. Le terme utilisé par Piaget est en fait précisément "invariant représentatif" (introduction à l'épistémologie génétique - Tome 2), et il n'est pas considéré comme se situant encore au niveau "logique".

Bardiès (de Boysson-Bardiès, 1973) ne rentre pas dans le cadre théorique des invariants logiques : ou bien on l'interprète comme un artefact (non expliqué par ailleurs) ou bien on la traite comme une remise en cause théorique. Aussi tout en maintenant à la construction d'invariants un rôle central dans la constitution de la connaissance, nous nous séparons de Piaget quant à la place théorique assignée aux concepts de conservations et d'invariants : pour nous ils ne relèvent pas d'une logique générale de la pensée qui serait dégagée des contenus, mais ont une signification spécifique par rapport aux objets en jeu (dans les divers champs conceptuels).

°

° °

2 - DOMAINE DE VALIDITE DES OPERATIONS COGNITIVES

Dans les rapports entre sujet et connaissance, nous nous séparons ici de la logique des "stades opératoires" dans laquelle s'inscrivent des affirmations comme "l'enfant en est au stade sensori-moteur" ou "c'est seulement vers douze ans que l'enfant atteint le stade des opérations formelles".

La notion de stade nous paraît une unité trop globale : elle ne permet pas de rendre compte des divergences constatées entre certaines acquisitions conceptuelles : aux conservations déjà citées on peut ajouter l'exemple de la relative stabilité dans l'évolution des classifications qui s'oppose aux décalages considérables à propos de l'espace (1).

Certes la recherche d'invariants généraux est une démarche qui a prouvé sa productivité. Les divers "champs conceptuels" correspondant à l'élaboration des connaissances ne sont pas clos : les instruments de pensée construits dans l'un d'entre eux peuvent être réinvestis dans d'autres.

Néanmoins, attribuer - comme le font certains textes de Piaget - à une "résistance du réel" le fait de ne pas retrouver les mêmes opérations cognitives dans divers champs conceptuels nous apparaît une impasse théorique quant à la compréhension des processus en cause et quant à l'intervention destinée à provoquer l'évolution des connaissances de l'élève.

---

(1) On peut trouver des problèmes de représentation spatiale maîtrisés par certains enfants de 6 ans qui posent des problèmes sérieux à certains adolescents - sans que cela soit en rapport avec d'autres différences cognitives.

2.1. La prise en compte effective des contenus (au sens de champs conceptuels spécifiés : espace, mesures, structures additives ou multiplicatives, topologie...) est un enjeu théorique décisif pour la didactique : la connaissance est toujours connaissance de quelque chose : la théorie doit intégrer l'interaction entre des invariants (généraux) du fonctionnement cognitif et les contenus spécifiés à propos desquels ce fonctionnement est actualisé.

Cela est évident à propos de contenus sur lesquels l'enseignement intervient mais concerne également des connaissances moins institutionnalisées.

On peut prendre l'exemple des quantités physiques ou spatiales, pour lesquelles les connaissances "spontanées" précèdent l'enseignement sur ces notions.

Pour Piaget, les conservations en ce domaine relèveraient d'une logique générale de la connaissance ; le recours aux arguments d'identité et de réversibilité (pour soutenir les conclusions de conservation) est aussi interprété en relation avec l'accès au stade opératoire (1). Or les conservations de la longueur, du volume, du poids, s'appuient sur des propriétés du monde physique, indépendantes des actions propres du sujet : c'est parce que les liquides sont incompressibles, parce que le champ de gravité terrestre est (relativement) constant, que les volumes et les poids sont conservés dans certaines transformations spatiales. A contrario, lorsqu'on étire un élastique et qu'on considère la longueur, on détermine une transformation réversible, dans une situation où on peut appliquer l'identité, qui a les mêmes caractéristiques "logiques" qu'une déformation de bouclette de plasticine, et pourtant il n'y a pas conservation de la

(1) La logique de l'enfant est alors celle du "groupe INRC" (identité, négation, réciprocité, contradiction) de la logique des propositions.

longueur de l'élastique...

2.2. En fonction de ces remarques théoriques, nous considérons comme productif d'introduire la notion de domaine de validité des opérations cognitives que le sujet (enfant, adolescent, adulte) peut engager dans des situations définies (à la fois précisesquant au(x) contenu(s) concerné(s) et à l'actualisation particulière de ce(s) contenu(s)).

Cette notion prend en compte les propriétés "objectives" (au regard de la connaissance scientifique acquise, et à l'échelle des phénomènes matériels considérés) ; elle permet une opérationnalité de concepts généraux, et n'enferme pas l'analyse dans un modèle trop spécifique.

Une transitivité précoce n'est plus alors nécessairement soit un artefact soit une mise en cause théorique ; les difficultés à rendre compte d'une évolution qui retrouve pour les notions spatiales les grands stades piagétiens peuvent être abordées àvec plus de sérénité théorique. Si on considère les problèmes de didactique dans un domaine particulier, la construction "spontanée" de la connaissance tout comme l'appropriation du savoir enseigné à l'école peuvent alors être analysées à la fois du point de vue de l'extension du domaine de validité de certaines opérations ou certains invariants, et du point de vue de la réorganisation des systèmes de représentations. On peut également se poser le problème des variables didactiques sur lesquelles jouer pour que l'extension du domaine de validité produise des restructurations de connaîssances, ou engage la dialectique déséquilibre/équilibration.

°

° °

3 - LE STATUT SOCIAL DE LA CONNAISSANCE

Centré sur la recherche d'invariants dans le fonctionnement de la pensée "épistémologique", Piaget - s'il situe les actions de transmission éducative et de culture comme intervenant dans le développement cognitif - n'opérationnalise pas sa thèse que "l'intelligence humaine se développe chez l'individu en fonction d'interactions sociales" (Piaget, 1967). Dans les expérimentations piagétiennes, les interventions sociales, comme le discours évoqué d'un autre enfant (dans les suggestions et contre exemples, par exemple), ne sont pas analysées sur le plan de leurs caractéristiques sociales mais traitées au même titre que les autres éléments de la situation-problème.

3.1. Or, d'une part l'enfant occupe une certaine place sociale : dans sa famille, dans son milieu de vie, à l'école ; d'autre part, en tant qu'élève il a un statut dans le milieu institutionnel de l'école. Les interactions sociales dans la construction de ses connaissances sont donc multiples. En ce qui concerne la place de l'enfant dans son milieu, l'expérimentation n'est pas possible et la connaissance directe exige des conditions très spécifiques permettant des "études de cas" ; nous n'y ferons référence que pour avancer quelques hypothèses générales pour l'analyse de nos résultats.

Pour le second point (l'enfant à l'école) il faut souligner le caractère institutionnel de l'école, la régulation de son fonctionnement à travers le réseau des manuels, le système de contrôle (l'inspection...), de la formation spécifique ou "sur le tas" (avec la double référence du passé d'élève de l'enseignant et de la pratique des autres enseignants), les programmes et les instructions (1). Cela permet une approche plus précise de l'analyse de l'intervention du système scolaire dans le développement cognitif.

---

(1) Cette régulation fonctionne de manière différente en France et dans d'autres pays, d'organisation moins centralisée.

3.2. L'étude que l'on peut faire sur le plan de la didactique entre développement individuel et organisation sociale laisse néanmoins de côté l'analyse du caractère social de la connaissance elle-même.

La thèse de l'intervention décisive, sur le plan théorique, du fait collectif et social dans la construction même de la connaissance (1) a été opérationalisée par Doise, Perret-Clermont, Mugny. Néanmoins, le poids mis dans leur analyse sur les notions de centration (et décentration) et le choix d'une certaine catégorie d'expériences dans lesquelles le contenu joue un rôle mineur nous paraît poser les mêmes problèmes que la non prise en compte théorique des contenus dans la théorie des stades opératoires.

---

(1) A la limite, la connaissance serait collective avant d'être individuelle non seulement sur le plan historique mais pour la psychogénèse.

4 - LES MATHEMATIQUES, SCIENCES D'ACTION

Une analyse de l'appropriation par l'enfant de notions mathématiques, tout comme une étude didactique du processus d'enseignement de concepts mathématiques, sous-entend une certaine représentation de ce que sont les connaissances en mathématique. (1)

4.1. Une telle représentation, même implicite, précise plus ou moins ce qu'est un "problème" de mathématiques. La construction de situations didactiques, comme l'interprétation des productions et des conduites des élèves, sont elles-mêmes dépendantes de la notion de problème.

Ainsi "résoudre un problème du premier degré" peut signifier : trouver la succession des transformations d'écriture à partir d'une certaine formule pour aboutir à $x = A$ où A est une écriture numérique (2,5 ; 7/8 ; $1 - \pi$ ...) ; cela peut aussi signifier "trouver la (ou les) valeur(s) d'une grandeur vérifiant une certaine relation de type linéaire" (le lieu de rencontre de deux trains circulant sur le même trajet, à vitesse constante, par exemple).

La définition des situations-problèmes pertinentes à un certain contenu mathématique étudié dépend de la position adoptée sur cette question.

La conception à laquelle nous nous rattachons rejoint celle développée par Piaget à propos de la connaissance. Elle s'appuie sur deux faits : la spécification des mathématiques comme champ de savoir particulier est le résultat d'un long processus, et l'interaction des mathématiques avec d'autres champs de savoir scientifique (la physique, la biologie, l'économie...) ne fonctionne pas exclusivement en sens unique.

4.2. Des notions, comme le nombre, la grandeur, l'espace et les déplacements qui organisent une connaissance sur le monde, fonctionnent comme des <u>précurseurs</u> de notions mathématiques.

---

(1) Cf. Révuz, in "Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?"

Ces notions mathématiques sont (ensuite) l'objet d'un développement autonome au cours duquel s'organisent des champs conceptuels proprement mathématiques ; le fonctionnement même des concepts les transforme en nouveaux référents possibles à partir desquels s'élaborent de nouvelles notions. Les perspectives ainsi modifiées permettent à leur tour d'interroger différemment le réel.

A côté d'un fonctionnement autonome - dont la part varie selon les concepts et leur place historique - la "mathématisation" correspond à un double processus : constitution d'un nouveau concept à partir d'une action sur le réel (pour résoudre un problème à propos de ce réel) et investissement de concepts "déjà mathématisés" pour représenter la réalité. L'existence de ce double processus nous a conduit à la formulation de "mathématiques, sciences de l'action". Nous reprenons là l'accent mis par Lebesgue sur le caractère des mathématiques : abordant le problème des rapports entre logique et arithmétisation, il souligne "les mathématiques ont été créées par les hommes pour leurs besoins (...). Le professeur de mathématiques doit rester un professeur d'action" (Lebesgue, 1975 (rééd., p. 180). Il a par ailleurs insisté sur le passage qualitatif que comporte le premier volet de la mathématisation. "Une mesure géométrique commence physiquement, elle ne s'achève que métaphysiquement" (id., p. 81) et de même "le nombre (auquel) nous ne parviendrons que par une opération de l'esprit" (id., p. 82).

On peut voir le processus complet à l'oeuvre à propos des distributions : lorsque Dirac travaille avec sa "fonction" (qui n'en est plus une) il y a opération avec un concept nouveau pour avoir prise sur une réalité dans un champ de la physique, élaboration ultérieure de la théorie des distributions : on est passé d'un concept "précurseur" : la "fonction" de Dirac à une notion mathématique insérée dans un fonctionnement d'ensemble: la distribution. Le réinvestissement ultérieur en physique est le moment le mieux reconnu du processus de mathématisation.

4.3. Bien entendu, nous ne pensons pas que les rapports respectifs des "moments" que nous distinguons (pour les besoins de l'exposition) dans la constitution de concepts nouveaux, le développement propre de systèmes conceptuels mathématiques, puis le réinvestissement comme instrument opérationnel sur le réel, soient les mêmes pour l'histoire des mathématiques et celle du développement de l'individu. Le rôle joué par le temps n'est pas non plus le même.

Nous ne pensons pas d'avantage que les moteurs dans l'évolution de ces processus soient analogues : l'enfant ne fait pas de recherche en miniature...

Le seul invariant que nous postulons c'est l'existence d'une double articulation avec le réel et le fonctionnement autonome possible des notions organisées en système de connaissances mathématiques (éventuellement inappropriées).

Nous voudrions pour terminer sur ce point, insister sur deux différences fondamentales :

- l'enfant (l'élève) agit, construit et s'approprie des connaissances dans une situation sociale où existent des savoirs scientifiques organisés, qui ont "diffusé" pour partie au-delà des professionnels ;

- dans l'institution scolaire, le maître existe qui dirige, dans le temps, le travail (individuel ou de la classe) sur les notions enseignées : le savoir (social) déjà acquis et transposé comme objet d'enseignement.

La dialectique que l'on peut mettre en jeu pour modifier les systèmes de connaissances des élèves peut donc être profondément différente de celles que montrent et l'histoire des mathématiques et la pratique de la recherche actuelle.

5 - LA NOTION DE CHAMP CONCEPTUEL

Nous allons présenter quelques éléments généraux sur la notion de champ conceptuel.[1] Le point de fond est le fait qu'à la fois un concept est à l'oeuvre dans une variété de situations et que dans une situation donnée plusieurs concepts sont en jeu, ce qui conduit à rejeter l'étude de concepts isolés, identifiés à un type de situations.

5.1. De façon schématique, les concepts peuvent être considérés comme des noeuds d'un réseau de relations ; un champ conceptuel correspond à une partie de ce réseau qui possède certains caractères, relativement à un ensemble de situations.

Par exemple sont pris dans le champ conceptuel des structures multiplicatives : les concepts de produit cartésien, de mesure - produit, d'applications linéaires sur $\mathbb{R}$, d'opération, de multiplication dans divers ensembles numériques ($\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$).

Réciproquement la surface (comme mesure) se rattache aux champs conceptuels des quantités physiques et des opérations de mesure, de la construction des nombres positifs, de l'espace et ses modèles, aux structures additives (comme mesure simple), aux structures multiplicatives (comme produit de mesures "linéaires").

Nous venons de citer des champs conceptuels référés essentiellement au domaine du déjà - mathématisé, mais cette notion reste significative pour d'autres référents à partir desquels se constituent des concepts "précurseurs".

Ainsi, la construction d'une collection complète et sans répétition de formes colorées à partir de formes et de couleurs données indépendamment, fait déjà intervenir les concepts de forme et de couleur : pour frustes qu'ils apparaissent au regard de la connaissance mathématique, ils n'en nécessitent pas moins un processus d'appropriation par le tout jeune enfant.

---

(1) Cette notion a été introduite par G. Vergnaud. Elle est développée, en particulier, dans Vergnaud, 1983.

Une telle construction fait aussi intervenir les notions d'identité et de différence pour des couples, éventuellement la cardinalité des ensembles, la distributivité (qui assure que toute forme est associée successivement à chaque couleur). On voit se dessiner un champ conceptuel en rapport avec la combinatoire des dimensions.

L'exemple d'une situation de repérage dans un quadrillage orthogonal fini fait appel à des concepts topologiques (être voisin de, être sur le bord...), à des concepts projectifs (l'alignement sur telle "horizontale"...) à des relations binaires liées à la métrique (près, loin) ou à l'orientation de l'espace (à droite/à gauche)...

5.2. La notion de champ conceptuel, que nous avons présentée ci-dessus, concerne la théorisation du développement cognitif au sens suivant : elle servira à l'analyse des situations problèmes et à l'interprétation des activités des élèves au cours de ces situations ; elle contribuera à orienter les observations, donc à définir le corpus.

Cela signifie que cette notion n'est pas relative au sujet, enfant ou élève, dont on étudie les acquisitions cognitives. Néanmoins, rien ne permet d'avancer que le découpage de champs conceptuels concernés par une situation (ou un ensemble de situations) pourrait être déterminé a priori et de façon univoque par la situation, indépendamment des problèmes que la recherche se propose d'étudier.

En fait, ce découpage dépend, en particulier, des savoirs préalablement établis sur la transmission et l'appropriation des connaissances. Ainsi - pour prendre un exemple - les notions prises en compte pour découper le champ conceptuel des mesures spatiales ne seront pas les mêmes selon qu'on se propose d'étudier un enseignement sur la mesure des surfaces à des élèves de 6ème ou sur la théorie de la mesure à des étudiants de mathématiques.

La notion de champ conceptuel - et celle de concept - fonctionne ainsi à des niveaux multiples ; ceux-ci par ailleurs, ne nous semblent guère pouvoir être hiérarchisés entre eux ni rapportés à un niveau absolu de référence qui serait par exemple, celui d'un "savoir savant".

La transposition d'un objet de savoir en objet d'enseignement nous paraît poser un problème similaire quant à la délimitation de l'"objet de savoir".

Le travail entrepris par Bourbaki a (sans doute conduit certains) pu conduire à considérer les "éléments de mathématique" comme un référent absolu. Nous laisserons le soin aux épistémologues des prochaines décennies d'en analyser le statut effectif. Il semble néanmoins apparaître que la pratique des mathématiciens ne reflète pas cette image d'un "savoir savant" découpable et identifiable. Les rapports construits entre notions mathématiques dans ces différentes pratiques, les problèmes qui en sont issus, contredisent, nous semble-t-il, le projet d'une définition absolue d'un "savoir savant" auquel on référerait tout le reste.

° ° °

6 - LES SYSTEMES DE REPRESENTATION DU SUJET

Nous venons de présenter le champ conceptuel comme un domaine regroupant un ensemble de notions sur un contenu cognitif donné. Il doit être "assez grand" pour comporter un ensemble de relations entre notions qui permette l'analyse d'un ensemble "assez large" de situations mettant en jeu le contenu étudié. Il doit être également "assez circonscrit" pour qu'il soit possible d'opératiomaliser au niveau de la recherche les questions posées sur l'acquisition du contenu. Par ailleurs, cette organisation en réseau a nécessairement des frontières floues (il est exceptionnel qu'un domaine de connaissances fonctionne de manière autonome, séparable des autres domaines).

A ce découpage associé à l'étude d'un contenu de connaissances, correspondent des hypothèses sur les représentations qu'a le sujet (pour nous : l'enfant, l'élève) des concepts en jeu et de leurs rapports, et des hypothèses sur les relations entre ces représentations (hypothétiques) et les observables que l'on peut organiser dans une situation donnée.

6.1. Systèmes de représentations. Règles d'action

6.1.1. De même que notre analyse d'un contenu de connaissance suppose qu'il n'y a pas de concept isolé, de même notre analyse du fonctionnement cognitif prend pour hypothèse de base qu'il y a, pour le sujet, des systèmes de représentations.

Ces systèmes de représentations, tout comme les règles d'action dont nous parlerons plus loin - ne sont pas directement observables. Ce sont des concepts théoriques qui nous semblent indispensables pour apporter des explications, valides sur un plan assez général, sur les conduites des élèves dans le domaine cognitif. Leur validité nous paraît ressortir de la cohérence et du domaine de validité des interprétations, et des prédictions éventuelles, plutôt que de l'existence actuelle d'une formalisation calculable. Les voies explorées par les travaux d'intelligence artificielle, avec en particulier l'étude des systèmes de production, montrent à la fois l'intérêt d'une modélisation précise et ses limites de validité : celles de situations étroitement spécifiées, portant sur des notions à caractère très fortement algorithmique, et dans un domaine très circonscrit.

Nous chercherons par la suite à proposer des propriétés des représentations qui nous paraissent compatibles avec les observables recueillis sur l'acquisition de la bidimensionalité dans le champ de la combinatoire des dimensions, du repérage plan, des mesures spatiales.

6.1.2. L'hypothèse de l'existence de systèmes de représentations s'accompagne de celle de règles d'action : dans une situation donnée, un ou plusieurs systèmes de représentations vont d'une part servir au sujet à organiser les informations fournies,à donner une signification à la situation (1), d'autre part à produire des règles d'action.

Nous allons en donner un exemple, à partir d'une tâche utilisée par Anh Ngyen Xuan, pour construire et analyser un système de production sur les classifications multiples (Anh Ngyen Xuan et al, 1983).

Prenons la situation suivante où de jeunes enfants (4, 5 ans) ont à placer dans une case d'un tableau (indiquée ci-dessous par "?") une carte parmi 21 qui réalisent (en trois exemplaires) le produit [carré, étoile, rond] x [rouge, bleu, jaune]. Les notations sont telles que (Cr) désigne le carré rouge, etc.

---

(1) La signification d'une situation pour un sujet n'est pas (exclusivement) déterminée par son système de représentations ; comme nous le verrons à propos de la mesure de surface, elle peut être déterminée par le contrat en jeu, par des caractéristiques contextuelles larges de la situation.

C_R	C_B	?
R_R	.	R_j
.	E_B	Ej

Tableau 1

Supposons que le système de représentation d'un sujet comporte :

- la notion de dimension de couleur,
- la relation de "ressemblance selon la forme" applicable à 2 objets,
- l'"isomorphisme" entre la relation spatiale "être à côté" (sur l'horizontale ou sur la verticale) et la relation ensembliste de ressemblance.

Ce système peut produire les règles d'action implicites (ou plus rarement explicites) suivantes :

Sur chaque colonne deux cartes ont toujours la même couleur (analyse de la situation en utilisant la notion de dimension couleur) alors la couleur de la colonne est connue : la carte qui manque est jaune ; les deux autres cartes sur la ligne du haut se ressemblent : elles sont carrées, la carte jaune (nouvelle) à mettre à côté de C_B est alors carrée comme sa voisine C_B (mise en oeuvre de la relation de ressemblance).

Un tel système de représentations permet de compléter la case "?" du tableau 2, mais il ne fournit pas de règle d'action applicable pour compléter la case "?" du tableau 3 puisque cette case n'est proche d'aucune case déjà occupée, ce ~~qui permettrait~~ d'utiliser la ressemblance selon la forme : l'enfant peut mettre n'importe quelle carte jaune.

C_R	C_B	?
R_R	.	.
.	E_B	E_j

Tableau 2

C_R	.	?
R_R	.	R_j
	E_B	E_j

Tableau 3

Si, dans le système de représentation, les différences de forme ont également un statut fonctionnel, alors il mettra C_j (si la tâche est analysée comme le placement de nouvelles cartes, il ne mettra pas E_j).

Avec le tableau 4, il mettra C_j ou R_j

C_R	.	?
R_R	.	[illegible]
	E_B	E_j

Tableau 4

Bien entendu, pour que ces règles d'action s'actualisent effectivement il faut que fonctionnent des processus d'analyse de la situation (balayage de tout le tableau en particulier), et des processus de mémorisation (garder en mémoire la couleur de la carte par exemple) qui ne relèvent pas du système de représentation.

6.1.3. Lorsqu'il s'agit de concepts logico-mathématiques, les règles d'action peuvent être des "théorèmes en actes" s'identifiant dans le résultat produit - sa régularité, sa stabilité - à l'effet de véritables théorèmes.

Le terme de "théorème en acte" a été introduit par Vergnaud : un sujet met en oeuvre un "théorème en acte" quand il passe d'une situation à une autre en utilisant une propriété qui a pour lui un caractère de nécessité logique (même s'il ne peut la verbaliser). Ainsi de jeunes enfants sont capables de juger qu'un passager d'une voiture qui fait le tour d'un lac soit voit toujours le lac quand il regarde par sa fenêtre, soit ne le voit jamais : ils utilisent un "théorème en acte" sur la continuité et la connexité (voire, selon la présentation de la situation, sur la convexité du lac). Une partie considérable de ce qu'on qualifie d'"intuition" en géométrie a ce statut de "théorème en acte" ; c'est aussi le cas dans les structures arithmétiques : par exemple l'associativité, la commutativité de l'addition se manifestent précocément dans l'activité du sujet qui calcule.

Des "théorèmes en acte" peuvent évidemment être "faux" - au regard d'un certain niveau de connaissances - mais fonctionner de manière stable dans tout un ensemble de situations, et s'intégrer dans les systèmes de représentations du sujet.

6.1.4. Nous devons ici souligner que nous n'avons pas fait l'hypothèse qu'un système de représentations était sans contradiction, ni que les règles d'action étaient univoquement déterminées par les systèmes de représentations. D'une part, dans la mesure où les règles d'action s'actualisent dans une situation spécifique, elles rencontrent des problèmes de mise en oeuvre pour devenir effectives ; d'autre part des règles d'action issues d'un certain système de représentations peuvent être conservées par le sujet dans une situation nouvelle qui relève d'un autre système de représentations. Cela peut se produire "localement" dans le temps, au cours d'une même expérience ou au cours d'une même séance scolaire. Cela peut aussi se traduire à plus long terme, en donnant lieu à des fonctionnements par analogie : ils peuvent être productifs mais aussi éventuellement abusifs ou réducteurs ("arithmétisation" de l'algèbre par exemple).

En tenant compte de ces deux points : actualisation de règles d'action, "importation" d'un domaine dans un autre, on peut traiter certaines caractéristiques de la situation comme des variables didactiques permettant, en particulier en jouant sur le domaine de validité des règles d'action, d'agir en retour sur les systèmes de représentations pour les transformer dans un sens voulu (par rapport à un objectif didactique). Les "jeux de cadres" tels que le définit R. Douady (Douady, 1984) peuvent faire partie de la gestion didactique des conservations ou des changements de règles d'action.

6.2. Place des systèmes de représentations dans l'étude des situations-problèmes et des situations didactiques

6.2.1. Avant de proposer une représentation (graphique) de l'organisation des différentes notions introduites : champs conceptuels, systèmes de représentations, règles d'actions et de situer dans ce schéma le fonctionnement d'un observateur, nous allons brièvement situer les situations-problèmes et les situations didactiques.

Les situations-problèmes et les situations didactiques diffèrent fondamentalement par l'objectif que vise leur utilisation : avec les situations-problèmes, on vise l'étude de "l'état cognitif" d'un sujet (dans un domaine spécifique);avec les situations didactiques on vise l'étude de la transformation des connaissances d'un sujet (dans un domaine spécifique).

6.2.2. Une situation-problème, comme l'indique son nom, suppose que le sujet est mis dans une situation nouvelle pour lui, à laquelle il doit s'adapter ou qu'il doit modifier en produisant des actions matérielles ou symboliques (représentations graphiques, réponse orale ou écrite, etc.) ; il y a à la fois nouveauté et problème à résoudre. Cette nouveauté fait référence aux acquis cognitifs du sujet : la signification du problème (et de la situation elle-même) dépend donc aussi de ces acquis antérieurs. Il découle un problème méthodologique : la situation-problème doit être construite en fonction des notions dont on analyse l'acquisition (en fonction d'un certain champ conceptuel), elle doit avoir du sens pour le sujet : les représentations qu'il met en oeuvre doivent être en rapport avec le champ conceptuel visé - faute de quoi c'est un autre problème abordé par l'enfant que celui étudié par l'observateur. L'analyse a priori de la situation-problème (analyse de la tâche) doit se confronter à l'analyse a posteriori des significations possibles pour le sujet (1) - compte tenu des connaissances que l'on a déjà sur son "état cognitif". On voit apparaître un fonctionnement dialectique inéluctable du déroulement de la recherche.

Un élément important de contrôle est non pas d'étudier une situation-problème isolée mais de la situer dans un ensemble de situations se contrôlant mutuellement, au plan de leur cohérence globale.

6.2.3. Une situation didactique suppose un projet social de transformation de connaissances, dans un système d'enseignement donné. Brousseau (Brousseau, 1981) distingue dans une situation didactique au moins une situation-problème et un contrat didactique. Cette situation-problème doit permettre à l'élève de commencer à élaborer une solution avec ses acquis antérieurs, lui faire rencontrer des obstacles qui le contraindront (2) à une modification de ses représentations :

" la question de rang n naît des problèmes rencontrés avec les solutions trouvées à la question de rang n-1, ou des conséquences et développement de ces solutions" (Brousseau, 1981, p. 55). Le contrat didactique permet à l'enseignant de gérer le déroulement temporel du processus, en particulier les phases: situation d'action, situation de formulation, situation de validation, institutionnalisation (dans laquelle on donne un statut

---

(1) On peut ainsi passer de la question "comment l'enfant résoud-il tel problème" à une autre "quel problème l'enfant est-il en train de résoudre" (M.C. Escarabajal, 1983).

(2) L'enseignant organisant en temps utile la formulation ou l'institutionalisation de nouveaux outils ou de nouveaux objets.

mathématique, reconnu comme tel dans le contrat, aux objets, techniques, notations utilisées dans les phases précédentes).

Le problème méthodologique central est l'organisation temporelle de situations qui aient les propriétés voulues à la fois pour que les élèves "entrent dans la tâche", pour qu'elle soit significative par rapport à leurs connaissances antérieures, et pour qu'elle contraigne à construire de nouveaux outils ou de nouveaux concepts (en rendant les précédents inopérants ou trop "coûteux").

7 - Le schéma qui suit résume les rapports entre les différents niveaux :

- la réalité sur laquelle porte l'action, en soulignant qu'ici "réalité" concerne évidemment la réalité matérielle mais aussi la réalité conceptuelle déjà construite par le fonctionnement du savoir (au sens où nous parlons d'objets mathématiques), (ce qui se rapporte à la réalité est entouré en tirets) ;

- le sujet, enfant/élève sur lequel porte notre analyse (ce qui le concerne est en traits pleins) ;

- le cadre théorique dans lequel se situe le contenu (ce qui s'y rapporte est en pointillés).

Le fonctionnement de la recherche est, dans ce schéma, le suivant :

- on (part de) (construit) une situation dans laquelle (est) (on met) le sujet : ce peut être une situation-problème ou une situation didactique.

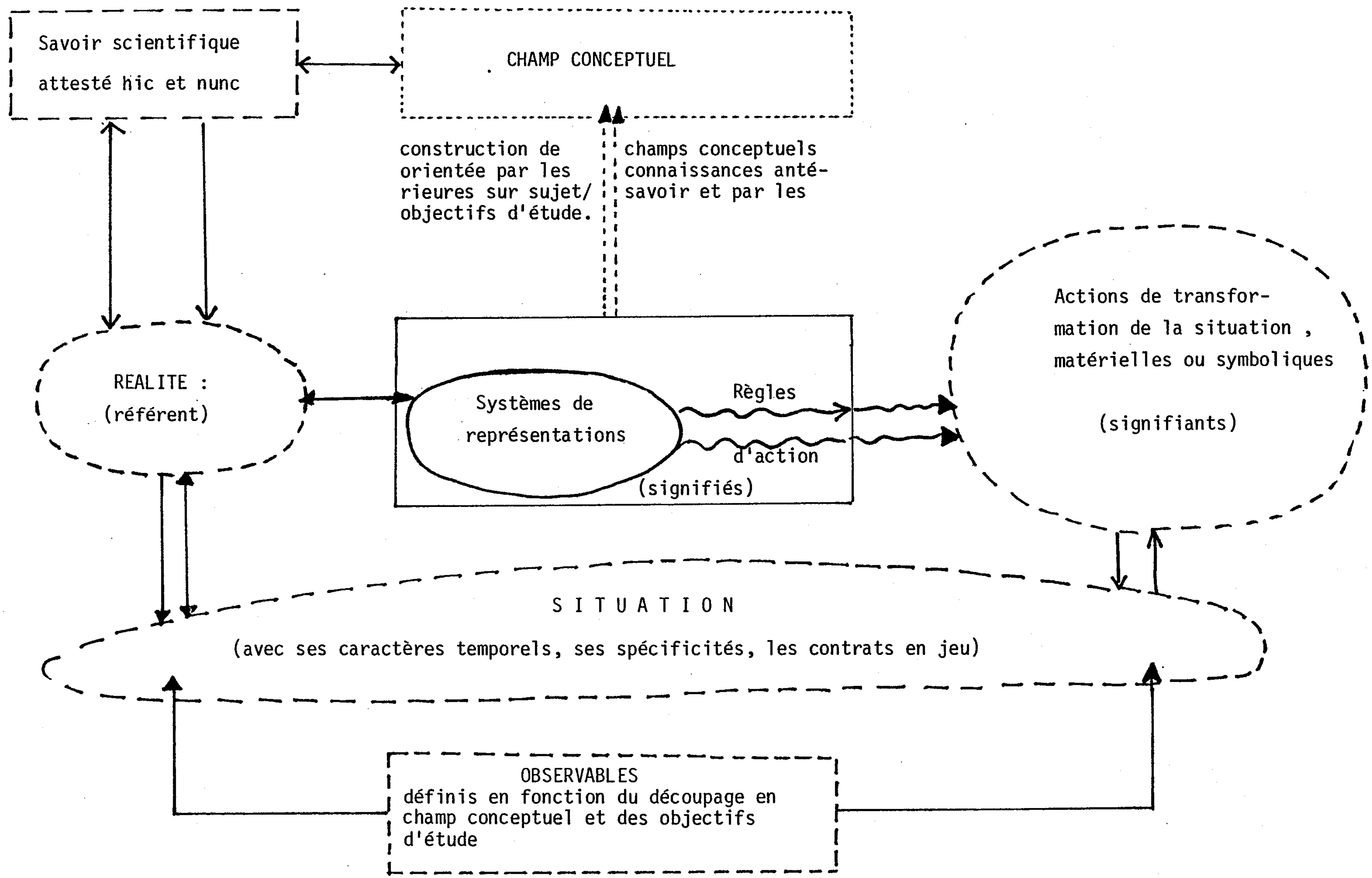
- on détermine (pour les connaissances acquises et éventuellement après coup) des observables pertinents de l'interaction sujet/situation ;

- ces observables sont l'objet qu'on va analyser pour "remonter" au couple systèmes de représentations/règles d'action ;

- les hypothèses quant aux rapports entre champs conceptuels et situations sont utilisées pour dégager des propriétés des systèmes de représentations eux-mêmes (en jouant sur les situations) ;

- on détermine (c'est l'objectif de la didactique) des variables didactiques pour construire une (nouvelle) situation didactique ("séquence" didactique - si on veut un terme qui connote le rôle du temps) candidate à produire une modification voulue dans les systèmes de représentationset les règles d'action (le système de connaissances "déclaratives" et "procédurales" de l'élève) ;

- on analyse le fonctionnement de cette situation didactique (sur les effets produits sur les systèmes de représentations) en "bouclant" sur le point de départ.



SCHEMA DES RAPPORTS INTERNOTIONNELS CONCERNANT L'ETUDE DE L'INTERACTION SUJET/SAVOIR

PARTIE I

CHAPITRE 1: OBJETS DE SAVOIR DU SUJET; OBJETS MATHEMATIQUES; OBJETS D'ENSEIGNEMENT 2

0. Statut de l'acquisition des connaissances sur la dimensionalité par rapport aux champs de savoir et à l'enseignement 3

1. La multiplication des dimensions 8

2. Le repérage du plan 19

3. Les mesures spatiales 25

CHAPITRE 2: OBJECTIFS ET METHODOLOGIE GENERALE 32

1. Les objectifs: niveau général, premiers aperçus méthodologiques 34

2. Les objectifs concernant le produit cartésien ensembliste, méthodologie associée 39

3. Repérage dans le plan, bidimensionalité spatiale et bidimensionalité ensembliste 48

4. La bidimensionalité des mesures spatiales 54

ANNEXES

C H A P I T R E   1

OBJETS DE SAVOIR DU SUJET
OBJETS MATHEMATIQUES
OBJETS D'ENSEIGNEMENT

0 - STATUT DE L'ACQUISITION DES CONNAISSANCES SUR LA DIMENSIONALITE PAR RAPPORT AUX CHAMPS DE SAVOIR ET A L'ENSEIGNEMENT

Pour étudier l'appropriation par les enfants et jeunes adolescents des éléments constitutifs de la combinatoire multiplicative, des bases du repérage plan par un système de coordonnées cartésiennes et de notions fondamentales sur les mesures spatiales, nous faisons intervenir, nous l'avons dit plus haut, un concept théorique général : celui de la dimensionalité.

Plus précisément : les questions que nous abordons vont concerner la bidimensionalité de produits ensemblistes $A \times B$, de produits d'applications $f \times g$, par rapport à l'unidimensionalité des ensembles A et B considérés comme ensembles de base, des applications f et g composantes du produit $f \times g$. De même la bidimensionalité impliquée dans le repérage du plan comme dans la mesure de surface se distingue de, et se coordonne à, l'unidimensionalité du repérage sur une ligne, l'unidimensionalité de la mesure linéaire, bref la bidimensionalité des variétés "surfaces" par rapport à l'unidimensionalité des variétés "lignes".

0.1. Dimensionalité et produit cartésien

A un premier niveau d'analyse, nous pourrions nous situer exclusivement par rapport à cette grande structure de base dans la construction d'objets mathématiques qu'est le produit cartésien. Combiner les valeurs de deux "dimensions", comme la forme et la couleur, serait lié à la construction d'un produit ensembliste ; coordonner deux relations indépendamment établies entre formes d'une part, couleurs d'autre part (de 2 ensembles) correspondrait au produit de relations et/ou d'applications ; repérer un point dans un plan relèverait de l'identification du plan (affine) à un produit isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Enfin, travailler sur la mesure de surface serait considéré comme une opération sur le produit des mesures de Lebesgue sur "chaque" $\mathbb{R}$. Ce sera effectivement un niveau essentiel de notre travail au sens où nous développerons plus longuement le rapport entre des objets de connaissance pour le sujet et des objets de savoir mathématique (1) (du domaine de savoir auquel s'intègrent les notions de produits, de relations d'équivalence et de quotient).

De plus, nous étudierons les rapports avec les objets d'enseignement mathématique qui, à une époque donnée et un niveau scolaire déterminé, sont une transposition didactique d'objets mathématiques.

0.2. Place de la dimensionalité dans la connaissance sur le monde

Cependant, s'agissant de l'appropriation de concepts qui jouent un grand rôle dans l'ensemble du développement cognitif de l'enfant et l'adolescent, on ne peut valablement rapporter les connaissances du sujet à un domaine unique du savoir, historiquement élaboré et spécifié (2) selon un très long processus.

Ainsi, considérant les connaissances dans le domaine spatial : les repérages dans le plan et la mesure de surface, nous devons certes tenir compte de leur statut comme objets mathématiques (liés à l'histoire de la géométrie) mais aussi de leur place dans la connaissance du monde physique. Les représentations de l'espace physique (ou de différents espaces : celui de la "saisie" visuelle et/ou manuelle, celui des déplacements du sujet, le macro-espace), la constitution de mesures directes ou indirectes (3),

(1) Avec la modulation sur ce terme, introduite plus haut (page XXIII).

(2) Au sens où les mathématiques se sont différenciées de la physique, en donnant deux secteurs spécifiques de connaissance.

(3) Il y a une mesure directe ou effective par exemple de la longueur avec l'instrument "mètre", des volumes par la capacité de récipients, mesure indirecte quand on calcule la surface à partir des longueurs.

que l'on peut effectuer sur des parties de l'espace ou sur des objets occupant des parties de l'espace - sont des constituants essentiels de cette connaissance "physique".

Par exemple, l'appréhension de la dimension du plan, en tant que variété topologique, peut s'analyser du point de vue des connaissances du sujet en rapport avec des notions mathématiques.

Mais dans le même temps, pour le "même" référent physique, se pose le problème de l'appréhension par le sujet de la dimensionalité physique d'une surface (surface considérée alors comme produit de deux dimensions physiques de longueur - cela même hors du problème des unités et du calcul arithmétique de la mesure).

D'une manière quelque peu différente, la description d'objets matériels en fonction d'un certain nombre de "dimensions" (couleur, forme, taille, texture, brillance, poids, volume, masse...) relève également de la représentation du monde physique. La description d'états de systèmes à partir d'une combinatoire d'états élémentaires (ex. : le résultat d'un lancer de 2 dés) fait partie de ces problèmes de représentations. Dans l'un et l'autre cas la référence au produit cartésien ensembliste, objet mathématique, est tout aussi évidente.

0.3. La "double articulation" des connaissances "logico-mathématiques"

Considérons - en étant très schématique - que l'on peut traiter les mathématiques d'un double point de vue : d'une part en tant qu'elles sont issues d'un travail d'organisation des représentations d'objets et d'états de systèmes matériels, et jouent en permanence un rôle de représentation des actions sur ces objets et systèmes ; d'autre part comme un domaine propre de savoir, qui possède sa dynamique interne , où les constructions qui s'effectuent deviendront des "objets" de travail ultérieur.

Certes le fonctionnement n'est certainement pas le même selon qu'on se place sur le plan historique de la genèse des mathématiques - construction sociale d'un savoir - ou sur le plan individuel de la psychogenèse. Mais il nous semble justifié de situer le processus de constitution de connaissances "logico-mathématiques" chez l'enfant ou l'adolescent par rapport à cette double articulation des concepts mathématiques en jeu ; cela d'autant qu'il s'agit d'un processus long concernant le sujet comme enfant ayant des activités propres sur le monde matériel (dans des lieux sociaux certes) et le sujet comme élève, scolarisé dans un système institutionnalisant des savoirs mathématiques.

Par suite, si nous allons étudier plus particulièrement les rapports entre les acquis cognitifs de l'enfant, les objets de savoir mathématique et l'enseignement lui-même, nous prendrons tout de même en compte, pour l'interprétation de ces rapports, l'insertion de la notion de dimensionalité dans les problématiques plus larges que nous venons d'évoquer. Ce, d'autant que la capacité à combiner des relations est un élément décisif pour l'organisation même de la connaissance : parcourir un ensemble organisé de possibles, constituer des hypothèses sur l'intervention relative de plusieurs facteurs, sont des éléments primordiaux pour la méthodologie de la connaissance. L'analyse dimensionnelle prend directement en compte cet aspect de l'organisation de la connaissance, elle nous semble donc une référence conceptuelle importante.

0.4. Pourquoi la centration sur les rapports aux mathématiques ?

Nous pouvons maintenant, donner brièvement les raisons essentielles de la centration effectuée ici sur les rapports au savoir mathématique, avant d'en spécifier les caractères principaux. D'une part, les connaissances de nature "multiplicative", acquises par l'enfant hors de l'école ou par l'élève dans la classe, débouchent effectivement sur des structures mathématiques au niveau y compris de leur formulation, et ce, quels que soient leurs contenus physiques d'origine. D'autre part, l'enseignement concerne d'abord, de façon dominante sinon exclusive, les notions mathématiques. L'enseignement des sciences de la nature ne débute guère avant le premier cycle du second degré, alors que les acquis sur le produit se développent, comme nous le verrons, de façon dominante de 4 à 12 ans, c'est-à-dire antérieurement.

De plus, les aspects de relations fonctionnelles et de mesure des grandeurs physiques ne sont que marginaux dans les premières années d'enseignement des sciences physiques ; quant à l'analyse dimensionnelle elle n'apparaît pas avant, au mieux, la fin du second cycle.

0.5. Relations entre les connaissances du sujet sur la dimensionalité les objets de savoir mathématique et l'enseignement

Les rapports entre les acquis cognitifs des enfants et adolescents, les objets de savoir scientifique, et l'enseignement lui-même, ne sont pas homogènes selon que nous considérons la "combinatoire des dimensions", le repérage spatial, les mesures spatiales : nous allons donc aborder spécifiquement chacun de ces domaines.

o

o o

1 - LA MULTIPLICATION DES DIMENSIONS

Les rapports entre la multiplication des dimensions (ou les classifications multiples), le produit cartésien ensembliste et l'enseignement sur les structures multiplicatives ensemblistes, sont complexes et évoluent dans un temps didactique long.

1.1. Genèse des notions

Il nous faut retracer d'abord brièvement la genèse des notions qui précèdent et préparent les acquisitions des jeunes enfants et élèves sur les structures multiplicatives logiques. Très jeunes, les enfants constituent des systèmes classificatoires de traitement d'objets sur lesquels portent leurs activités. A valeur d'abord locale - aussi bien dans le temps que dans l'espace des objets classifiables (1) - ces systèmes évoluent, leur stabilité croît, leur domaine de validité s'étend.

Certaines des classifications sont valorisées par la culture "ambiante", et le langage y joue un rôle organisateur (social) important.

Nous pouvons prendre comme exemple la classification selon la couleur, puisque ce sera une "dimension" concrètement présente dans notre travail expérimental sur le produit. A partir de relations locales de différenciation et d'appariement se constitue un début de classification opératoire, où l'èxhaustivité et l'exclusivité se traduisent par le fait que sont mis

---

(1) Vergnaud (1972), Pieraut-Le Bonniec (1972, 1977).

ensemble les objets "pareils - en - couleur", et que, sur de "bons" ensembles d'objets, tous les objets sont classifiables (couleurs uniformes, oppositions nettes, textures et brillances analogues...).

Un pas qualitatif est ensuite franchi, à partir de la permutabilité des couleurs (une bille peut être bleue, rouge ou verte sans changer par ailleurs ses propriétés fonctionnelles, de taille, de poids, etc. (1) : la couleur elle-même se constitue en nouvel objet de connaissance.

Non seulement l'enfant pourra faire des regroupements cohérents d'objets d'une collection présente hic et munc, mais il pourra y adjoindre de nouveaux objets non seulement dans les couleurs présentes mais dans une quelconque nouvelle couleur. Il pourra, et là se situe le pas qualitatif majeur, poser (ou se poser) la question "quelle est sa couleur ?" à propos de tout objet présent ou représenté mentalement.

Le "traitement" culturel (et linguistique) de différentes "dimensions"

Les propriétés ainsi "détachables" des objets constituent des "dimensions", bases d'activités classificatoires ; elles sont multiples, et dépendent d'ailleurs de la culture dans laquelle vit l'enfant et de la langue dans laquelle s'effectue sa communication avec les autres. (Les implications que peuvent avoir pour l'enseignement nos analyses des structures produit ne sauraient être généralisées sans études spécifiques à des systèmes culturellement et linguistiquement très divergents de ceux des enfants de culture et langue française que nous avons observés).

---

(1) Cette permutabilité n'a pas un domaine de validité infini : pour de jeunes enfants (voire de moins jeunes) les automobiles rouges peuvent aller plus vite que les autres.. et le fonctionnement de la permutabilité est relatif à certains domaines notionnels, fonctionnels, affectifs ou sociaux.

Pour reprendre l'exemple de la couleur, une remarque importante est que la langue opère une discrétisation sur les couleurs, qui transforme un système physique continu (à l'échelle de la physique classique des longueurs d'onde) en un ensemble discret et fini, des valeurs. De plus, dans le domaine fonctionnel des activités de l'enfant - et de la majorité des adultes - l'ensemble de valeurs ainsi obtenu est petit (une douzaine, si on ne retient pas la modulation clair-foncé) (1).

Une discrétisation s'effectue également sur la forme (d'objets "plats" ou de dessins, en particulier) d'une nature différente et plus complexe puisqu'elle s'effectue sur un ensemble de valeurs a priori non unidimensionnel. L'emploi des valeurs pratiquées est beaucoup plus variable que celui des couleurs.

Remarquons de plus que le statut des valeurs dans la langue est par ailleurs différent pour la couleur et pour la forme : le fonctionnement comme adjectif des couleurs est valable pour toutes, alors que certaines formes ont une désignation fonctionnant comme nom ou comme adjectif (rond, carré) mais la plupart fonctionnent seulement en tant que nom (croix, étoile, lune, triangle, hexagone) (2). Nous aurons l'occasion d'y revenir.

Les caractères des "dimensions"

Cette discrétisation des formes et couleurs ne se retrouve pas pour toutes les "dimensions" : ainsi la "grandeur-grosseur" d'un objet (au sens de la place qu'il prend, de son "encombrement") fonctionne comme une quantité intensive continue, avant que la mesure numérique ne soit établie. La longueur, qui recevra un statut institutionnel relativement précoce (CE1), fonctionne d'abord avec un système d'opposition grand-petit (discret mais relatif à une classification en cours, très spécifiée), enrichi ulté-

---

(1) bleu, jaune, rouge, vert, orange, violet, blanc, noir, gris, rose, marron.

(2) S'il s'agit en revanche de "motifs" répétés sur une surface, le statut devient de type adjectif "à pois", "à petits carreaux", ...

rieurement (et tôt) avec les relations d'ordre "plus grand" et "plus petit".

Il en va de même pour la masse comme une "quantité" de matière et pour le poids (sans entrer dans le problème de leur différenciation notionnelle).

La numérosité (1) fournit un système de classification particulier, ordonné lui aussi et discret mais non borné, également présent très tôt dans l'enseignement.

Nous n'entrerons pas dans le débat sur la discrétisation (par le langage ou lors d'opérations de mesure physique effective) des ensembles continus de valeurs pour certaines "dimensions" mais il faut souligner que, d'une part c'est cette discrétisation qui permet de représenter des ensembles de valeurs par des ensembles finis et d'en fournir explicitement la liste (pour certaines classes de situations tout au moins), d'autre part les situations où s'opère une telle discrétisation ne vont pas fonctionner comme celles dans lesquelles est impliquée une mesure continue.

La structuration "multiplicative" des dimensions

De multiples systèmes classificatoires se constituent ainsi dès la petite enfance. La coordination de ces systèmes - ou tout au moins de certains d'entre eux - et leur structuration "multiplicative" est un nouveau pas qualitatif, objet principal de notre étude sur la combinatoire du produit cartésien fini.

Un objet, comme un carré rouge, va alors non seulement être identifiable de façon globale, non seulement être classable comme "rouge" (avec

---

(1) Les caractéristiques numériques comme le cardinal des collections ou le nombre de points ou autres marques sur des objets.

d'autres rouges et "contre" des bleus, des jaunes...) ou comme "carré", mais il va pouvoir être caractérisé par rapport à d'autres objets par les valeurs de deux "dimensions" : "carré, quant à la forme", "rouge, quant à la couleur".

Cela signifie qu'une valeur (comme "rouge") est définie par opposition et permutabilité avec les autres valeurs de la même "dimension" et qu'elle est définie indépendamment des valeurs sur l'autre (ou d'autres) "dimension(s)".

Ce "carré rouge" peut être comparé, opposé à la fois au "carré bleu", au "carré jaune", et au "rond rouge" ou au "triangle vert". Cette double classification correspond à un double système de relations d'équivalence indépendantes qui, par passage au quotient - à la classe - "envoient" les objets (ou plutôt leurs représentations) sur les ensembles de valeurs actuelles ou possible des "dimensions" en jeu.

Dans notre travail expérimental, nous avons choisi des situations telles que les valeurs de chaque "dimension" considérée fonctionnant comme des éléments d'un ensemble, et des "dimensions" indépendantes. Plus précisément : aux âges des enfants avec lesquels nous travaillons ce sont là deux hypothèses cohérentes avec les travaux des psychologues. Nous reviendrons sur le statut de ce type d'hypothèses dans le chapitre sur la méthodologie.

La formation, ou la formalisation dans un modèle, de l'objet de connaissance de l'enfant peut bien être alors rattachée à l'objet mathématique : "produit cartésien".

La combinatoire des "états"

Nous avons jusqu'ici considéré l'acquisition de notions sur le produit ensembliste, en relation avec "la combinatoire des dimensions". C'est en effet le thème central de nos travaux expérimentaux sur ce sujet.

Mais au-delà de la description opératoire de collections d'objets, le produit cartésien représente aussi des descriptions d'états possibles de systèmes. C'est le cas par exemple pour un pendule oscillant (on peut "jouer" sur la masse et la longueur pour définir des états du système-pendule) ; c'est le cas également des représentations des coups possibles obtenus en lançant deux dés.

Or, le rapport du produit avec la connaissance de l'enfant, l'adolescent (et ici nous semble-t-il, l'adulte lui-même) est profondément différent dans les situations-problèmes selon que l'ensemble des états peut être ou ne peut pas être manipulé dans une simultanéité, et que le sujet doit se situer au seul niveau des représentations (sans s'appuyer sur des opérations concrètes sur des réalisations de ces représentations).

En fait l'hypothèse que nous faisons est la suivante : la notion de "produit cartésien" s'intègre comme une connaissance nouvelle non pas dès qu'une collection d'objets peut être représentée, a posteriori, comme résultat de la combinaison des valeurs des 2 dimensions mais quand, en plus, une collection, non donnée a priori comme telle (1) peut être constituée sous forme d'une réalisation matérielle, ou d'une représentation symbolique, par l'opération même de combinaison de valeurs (par exemple de n formes et p couleurs).

Le problème de la construction chez l'enfant des notions cognitives débouchant sur le produit ayant été délimité, il nous faut indiquer à quel(s) objet(s) de savoir nous nous référons pour représenter ce "produit".

1.2. L'objet de savoir en jeu

L'objet de savoir en jeu : le produit cartésien ensembliste, apparaît a priori comme très simple ; à partir de deux ensembles X et Y le produit $X \times Y$ est défini comme l'ensemble des couples (x, y) où x est élément de X et y élément de Y. Cette structure élémentaire présuppose "seulement" des notions ensemblistes d'une part, la distinction de l'ordre $(x,y) \neq (y,x)$,(2)

(1) C'est-à-dire non donnée en extension mais définie ici comme résultat d'une opération de construction.

(2) Par rapport à la combinatoire des dimensions, il faut préciser que dans ce modèle X et Y doivent être d'intersection non vide. Le cas opposé extrême, celui du carré cartésien, est différent, nous y reviendrons plus loin, cf. p. 43.

d'autre part. La "simplicité" de la notion présuppose ainsi que la notion d'ensemble soit simple. Or, élément d'une théorie des fondements des mathématiques, cette notion est l'aboutissement actuel d'un processus historique de travail sur la connaissance mathématique. Sortie de ce cadre théorique, elle soulève par ailleurs d'énormes problèmes sur la représentation et la signification. Chacun a rencontré dans les manuels élémentaires (destinés aux élèves ou au maître) la situation suivante : une ficelle, objet réel, entoure des objets réels sur une table ; elle est censée jouer au niveau des représentations le rôle de constitution des objets en un ensemble. L'hypothèse implicite qui "justifie" ce statut de la ficelle est que la disposition relative ficelle/objets va fonctionner par analogie avec la représentation symbolique d'un ensemble en diagramme de Venn.

De plus, si nous considérons non plus cette définition "constructive" du produit cartésien X x Y mais la définition comme solution d'un problème universel nous avons singulièrement déplacé le caractère "élémentaire" du produit cartésien..

D'autre part, un objet de savoir ne se saisit pas à partir de sa seule définition : il s'inscrit dans un champ conceptuel, où un système de relations le met en rapport avec d'autres notions. Ainsi le produit cartésien implique un cortège de notions :

- les projections p_X et p_Y sur les ensembles X et Y,
- les relations d'équivalence R_X et R_Y canoniquement associées à P_X et P_Y
- les isomorphismes canoniques
  $X \times \{y\} \cong X$ et $\{x\} \times Y \cong Y$, pour tous $x \in X$ et $y \in Y$,
- l'isomorphisme canonique $X \times Y \cong Y \times X$,

- le produit $f \times g : X_1 \times Y_1 \rightarrow X_2 \times Y_2$ défini à partir d'applications $f : X_1 \rightarrow X_2$ et $g : Y_1 \rightarrow Y_2$

...

Ces points de vue sont symétriques par rapport aux ensembles X et Y; on peut aussi considérer le produit comme relevant d'un champ conceptuel quelque peu différent - et plus large, d'une manière qui dissymétrise les statuts de X et Y, en représentant X x Y comme un fibré $\mathcal{F}$ trivial soit au-dessus de X (et de fibre Y), soit au-dessus de Y (et de fibre X).

Si on note F_x la fibre au-dessus de x, s une section (c'est-à-dire une application s de X dans le fibré $\mathcal{F}$ telle que $s(x) \in Fx$ pour tout x) $\mathcal{F}$ est isomorphe à un fibré trivial s'il y a card (Y) sections dont les images forment une partition de $\mathcal{F}$.

Cela équivaut au fait qu'il existe une application g de $\mathcal{F}$ sur Y telle que pour tout y $s_y(x) = F_x \cap g^{-1}(y)$ définisse une section.

Cette réalisation de X x Y, qui dissymétrise X et Y, rapproche ainsi l'objet mathématique de l'objet de connaissance pour le sujet, étant donnés les rôles souvent asymétriques joués par des "dimensions" différentes dans les processus cognitifs de représentations des systèmes matériels.

De ce même point de vue non symétrique, le produit cartésien est à rapprocher des opérations de quotient. Un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ peut être constitué de façon naturelle en fibré sur l'ensemble quotient $\mathcal{E}/\mathcal{R}$ - la fibre au-dessus de $\widetilde{x}$ est la classe d'équivalence de x. Un produit cartésien est en particulier muni de deux relations d'équivalences telles que $\mathcal{E}$ soit un fibré trivial au-dessus de chaque ensemble quotient.

Dans ce champ conceptuel où s'insèrent les concepts de relations d'équivalence, quotient, produit les problèmes significatifs sont ceux de "passage au quotient" d'opérations sur $\mathcal{E}$, et de "relèvement" d'opérations sur les ensembles quotients.

De plus, les deux opérations de produit et de quotient sont à la base de nombre de construction de nouveaux objets mathématiques et/ou d'enseignement et ce, dès l'enseignement obligatoire.

Ainsi $\mathbb{Z}$ comme quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{Z}^*$ comme produit $\mathbb{N}^* \times \{-, +\}$) $\mathbb{Q}$ comme quotient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, les ensembles de vecteurs comme quotient d'ensembles de bi-points...

1.3. Intervention de l'enseignement

Or, comme nous l'avons dit, l'un des objectifs de notre travail est d'analyser le statut de la connaissance construite par l'enfant et l'élève sur la "multiplication logique des dimensions" par rapport au modèle que peut constituer l'objet de savoir "produit cartésien ensembliste". Il se trouve que la façon dont cet objet de savoir se situe lui-même dans l'enseignement donne une pertinence de l'objet de notre travail par rapport aux problèmes de la didactique des mathématiques - nous voyons deux faits principaux à relever :

La "priorité" des acquisitions "spontanées" sur l'enseignement ès qualités

En premier lieu, le développement cognitif lié à l'analyse des objets ou des situations selon des "dimensions" multiples a lieu en tout état de cause, et pour une part décisive avant une scolarisation où les visées didactiques soient dominantes.

Nous ne sommes donc pas dans une situation telle que celle de l'enseignement de l'algèbre (1) par exemple, où l'essentiel des acquis de l'élève

(1) Nous faisons référence à ce qui est étiqueté "algèbre" dans l'enseignement secondaire, et plus spécialement au calcul littéral.

concerne un objet d'enseignement, partiellement un objet de savoir mathématique - et fort peu une connaissance opératoire sur le monde.

Concernant le produit cartésien, la connaissance de l'enfant, issue de ses activités socio-cognitives générales, prend beaucoup plus de place dans son développement cognitif que la connaissance institutionnalisée qu'il acquiert comme élève,.dans le lieu scolaire. Nous qualifierons par la suite la connaissance non institutionnalisée de "spontanée" bien que ce terme semble éliminer le fait social de la construction des acquis, mais il sert à introduire une différenciation "institutionnelle" des connaissances enseignées/acquises à l'école (de la même manière que l'on parle de modèle spontané du sujet pour des notions comme la continuité, la vitesse, et d'autres concepts physiques).

L'étude de cette acquisition "spontanée" des connaissances est donc importante pour analyser ce qui se passe dans l'école lors de l'enseignement de notions relevant du champ conceptuel dans lequel on peut situer le produit cartésien.

L'objet de savoir comme "connaissance implicite" et non objet d'enseignement

Un deuxième fait à souligner - que nous étayerons plus loin par une brève étude des manuels scolaires - est que l'objet de savoir "produit cartésien" n'est pratiquement pas objet d'enseignement dans l'enseignement élémentaire et du 1er cycle du second degré. Certes nous le voyons apparaître dans la table des matières d'un manuel récent de CE1 mais c'est sous une forme bien particulière (liée à la construction de tableaux à double entrée). Les programmes de 6ème que ce soit en 1960, après la réforme de 70, ou en 1977 n'y font pas référence : celui de 1960 est - comme le précédent - centré sur les mesures, celui de la "réforme des mathématiques modernes" donne une assez large place aux notions ensemblistes mais le produit cartésien n'en fait pas partie, enfin celui de 1977 - le dernier en date - retient l'utilisation du langage ensembliste et de ses symboles, mais la notion de couple apparaît dans le texte du cours celle de produit cartésien n'est pas explicitement utilisée.

Cette raison que nous venons de donner pourrait apparaître paradoxale : pourquoi l'acquisition des notions liées au produit serait-elle pertinente pour la didactique justement parce que, aux niveaux considérés, le produit n'est pas un objet d'enseignement ? C'est que si le produit cartésien n'est pas un objet d'enseignement explicite, en tant que notion logico-mathématique, il est sous-jacent à de très nombreux objets de l'enseignement obligatoire. Nous venons, par exemple, de signaler l'usage du terme "couple" dans des manuels de 6ème : son usage est réglé par l'hypothèse implicite que l'élève sait travailler non seulement sur un couple mais sur tout couple, en fait sur un produit cartésien.

De même, lorsqu'en 5ème les entiers relatifs sont introduits comme quotient de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est à partir d'une relation d'équivalence entre couples d'entiers naturels supposée sans problèmes.

Une meilleure connaissance de l'organisation conceptuelle (des acquis cognitifs de l'élève) liée au produit cartésien est donc un élément important, d'une part pour analyser le fonctionnement de nombre d'objets d'enseignement (et de savoir et savoir-faire liés), d'autre part pour construire des situations didactiques concernant des connaissances mathématiques, qui impliquent l'appropriation du produit cartésien soit dans leur construction, soit dans leur fonctionnement.

Nous ne développons pas ici un tel travail mais nous analysons certains des rapports entre "unidimensionnel" et "bidimensionnel" à propos de l'enseignement sur les structures multiplicatives numériques dans l'enseignement primaire.

°

° °

2 - LE REPERAGE DU PLAN

Les rapports entre le repérage spatial dans le plan, l'objet mathématique : le plan géométrique isomorphe à $\mathbb{R}^2$ et les objets d'enseignement de la géométrie plane, présentent certaines analogies avec ceux que nous venons de présenter concernant le produit cartésien.

Certes, le champ conceptuel dans lequel se situent les problèmes de repérage est beaucoup plus vaste puisqu'il couvre l'ensemble des notions spatiales. Cependant, si nous centrons nos préoccupations sur le repérage - et particulièrement le repérage lié aux coordonnées cartésiennes - les caractères communs sont importants, la précocité des premiers acquis, l'âge auquel se pose la question de la coordination de relations "unidimensionnelles" de repérage, les rapports temporels entre les acquisitions "spontanées" et l'intervention de l'enseignement. En revanche, la nature de la droite réelle se traduit par des différences certaines entre l'objet de savoir et l'objet d'enseignement par rapport au caractère "amorphe" et fini des ensembles que nous considérions à propos du produit cartésien.

Il faut ici souligner que les problèmes dits de repérage, tels qu'ils sont abordés ici et dans l'enseignement, ne portent pas sur le repérage "pratique", des déplacements réels par exemple, mais le repérage dans une représentation. Cette représentation peut être graphique ou être réalisée sous forme de maquette.

Eléments de genèse des représentations de position

Esquissons maintenant les grandes lignes des premiers éléments du développement cognitif sur ces problèmes de "positionnement" ; avant deux ans un enfant est déjà capable d'utiliser certaines informations sur les dispositions d'objets réels données par une représentation de type dessin ou photo ; vers deux-trois ans, le passage de l'espace réel à une maquette est significatif pour lui : il peut ainsi transposer certains de ses déplacements dans un espace, marqué d'objets identiques (des cubes par exemple) présentant une configuration organisée et simple, en déplacements d'une poupée dans une maquette représentant cet espace. Un peu plus tard (1) s'établit la possibilité de travailler directement sur des espaces de représentation, sans qu'un espace réel de référence ne soit présent.

Un ensemble de relations se développe à partir d'indices pris par rapport au corps propre : devant/derrière, loin/près, d'un côté/de l'autre. Appliquées d'abord à des objets "orientés" comme l'est le corps propre (une poupée, une maison...), elles permettent ensuite des repérages locaux dans un espace objectif (d'objets extérieurs non rapportés au corps propre).

Des coordinations locales permettent des premières possibilités de repérage non syncrétique ; ces coordinations peuvent concerner des relations de nature topologique (dedans/dehors/sur le bord) et des relations de nature (pré)métrique, (loin, près) ou liées à l'orientation du plan (à droite/à gauche).

Le caractère culturel très prégnant des représentations graphiques planes de l'espace "à trois dimensions" privilégie dans ce développement certains systèmes de repérage. D'une part les supports matériels utilisés - tables, papier, voire écran de télévision - sont délimités par un cadre rectangulaire, orientés de façon spécifique par rapport au corps deux des bords sont - par rapport au sujet - dans des plans fronto-parallèles, les deux autres orthogonaux, sont parallèles au plan de symétrie droite/gauche. D'autre part, l'espace y est représenté de sorte que la direction de l'axe de symétrie soit significative de la dimension "haut/bas" (la verticale).

---

(1) Vers 3/4 ans, voir Maury, (1976).

La conjonction des propriétés des supports matériels et des caractéristiques des représentations planes contribue à ce que le système "horizontales/verticales" joue dans le développement du repérage un rôle spécifique.

Le repérage d'un point de cet espace de représentation peut se faire en coordonnant la position par rapport à la direction "proximal - distal" (qui coïncide avec celle "bas/haut" de la feuille de papier), avec la position "latérale". Cette coordination de deux relations spatiales spécifiques est conceptuellement proche de la composition multiplicative des dimensions. Le problème de son acquisition se pose d'ailleurs dans la même période antérieure à la scolarisation.

Le plan affiné comme objet de savoir de référence

L'objet de savoir sur lequel débouchent ces systèmes de repérage - au niveau de la formalisation - est l'objet mathématique "plan affiné" [muni d'un repère isomorphe à $\mathbb{R}^2$]. C'est un objet de savoir plus complexe que celui auquel aboutissaient les opérations combinatoires, pour deux raisons essentielles. D'une part, il y a là un produit cartésien particulier, avec comme ensembles de base $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$; or la droite réelle - quelqu'en soit le système d'axiomes - est un objet complexe, qui renvoie entre autres à la mesure et au calcul numérique. Tel n'était pas le cas pour les ensembles "amorphes" et finis considérés dans la combinatoire des dimensions, comme la forme et la couleur. (En revanche, certaines dimensions physiques : la masse, le poids, la longueur présentent des caractères identiques - puisqu'aussi bien on les représente justement par $\mathbb{R}^+$). D'autre part, le champ conceptuel dans lequel s'inscrit $\mathbb{R}^2$ comme plan est, nous l'avons souligné plus haut, très vaste. Là s'inscrit a priori une différence majeure avec le produit cartésien, différence qui a évidemment des conséquences sur les rapports entretenus avec l'objet d'enseignement.

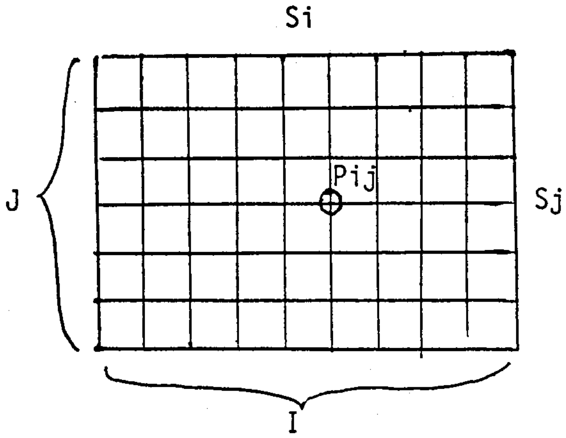
La situation spécifique des quadrillages (finis)

En fait nous analysons la capacité des enfants à repérer des positions dans un repérage déjà explicite, construit à partir d'une discrétisation des positions : un quadrillage de "chemins" en nombre fini, les seuls points en jeu étant les "carrefours". Le modèle "sous-jacent" n'est alors pas le produit [A B] x [A' B'] de deux intervalles mais un ensemble de points défini à travers l'intervention d'un produit fini I x J :

L'ensemble $\mathcal{P}$ des points du quadrillage est défini par

$$\mathcal{P} = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (S_i \cap S_j)$$

où les S_i sont - ici - des segments disjoints (parallèles), dont les origines sont situées sur un même segment, de même longueur, ayant leurs extrémités sur un segment parallèle au premier, les indices i appartenant à un ensemble fini I ordonné, avec des propriétés analogues pour S_j. Les directions des S_i et S_j étant par ailleurs indépendantes (orthogonales).



Deux notions importantes interviennent : la relation $S_i \cap S_j = \{P_{ij}\}$ où P_{ij} est un point, et la structure produit I x J qu'a l'ensemble indexant les points du repérage.

Le caractère "multiplicatif" de cette structure rapproche les problèmes cognitifs de repérage de ceux de la combinatoire du produit. Néanmoins la relation fondamentale d'intersection des lignes pour définir un point (ou une "position") relève, quant à elle, de propriétés topologiques du plan.

La réalisation choisie avec un quadrillage orthogonal et un petit nombre de segments nous paraît telle que la relation $\{P\} = S_i \cap S_j$ est considérée comme évidence implicite, elle fonctionne pour les enfants comme un"théorème-en-acte". Sous cette hypothèse, le problème de l'acquisition du repérage est centré sur la maîtrise de la combinatoire I x J des indices. Dans la mesure où on ne demande pas à l'enfant de construire lui-même un tel quadrillage, l'objet de savoir en jeu est très largement réduit. Cependant nous ne devons pas oublier qu'il s'agit là d'une hypothèse de travail, plausible eu égard aux connaissances acquises à ce jour sur les savoirs des enfants, mais dont le domaine de validité peut être limité pour les jeunes enfants (1).

L'objet d'enseignement "repérage dans un quadrillage"

L'objet d'enseignement, qui est en rapport avec ces problèmes de repérage, se présentede façon tout à fait explicite comme un objet propre recevant une formulation différente de celle de l'objet de savoir.

On voit par exemple dans un manuel de CE1 (1978) deux rubriques "quadrillage - repérage de carreaux" et "quadrillage - repérage de points", et de même en 6ème (1977) une rubrique "quadrillage", qui distingue également repérage d'une case et repérage d'un noeud.

(1) Le problème de l'évolution de ce domaine de validité met en jeu l'objet de savoir beaucoup plus large, $\mathbb{R}^2$ introduit plus haut - cela ne fait pas partie de nos objectifs, centrés sur l'acquisition de la bidimensionalité.

Il y a évidemment une dualité entre segments et bandes inter-segments et un complet isomorphisme des opérations de repérage. (Néanmoins l'existence simultanée des deux repérages introduit des problèmes d'intervalle dont on sait qu'ils ne sont pas si simples à maîtriser).

Remarquons la proximité de cet objet d'enseignement et des objets de pratiques sociales, des mots croisés au plan de ville, en passant par la bataille navale ou le jeu d'échecs.

Une connaissance du développement de la compétence qu'ont les enfants à utiliser des quadrillages déjà construits, une étude des propriétés qu'ils utilisent et des obstacles qu'ils rencontrent - et franchissent ou non - dans des tâches somme toute socialement "banales", peut nous éclairer sur le statut didactique de l'enseignement - qui existe - portant sur ces notions.

o

o o

3 - LES MESURES SPATIALES

L'acquisition de notions fondamentales touchant aux mesures spatiales met en jeu un nouveau champ conceptuel avec le concept même de mesure, et l'arithmétisation de celle-ci - en rapport avec le problème de l'unité. L'existence des rapports avec des objets de savoir mathématiques et des objets d'enseignement y apparaît comme sans doute plus évidente que pour la combinatoire multiplicative ou le repérage plan. On peut rappeler la place déterminante qu'occupaient les mesures (longueur, surface, volume) dans l'enseignement de la géométrie au siècle dernier...

De fait les mesures spatiales ont une situation particulière dans le champ de la didactique, place déterminée à la fois par leur statut dans la connaissance du sujet, par leurs caractéristiques comme objets mathématiques et par la façon même dont elles sont définies comme objet d'enseignement.

Les relations entre le décompte et les quantités

On sait le rôle que jouent dans le développement cognitif les opérations de décompte (construction et structuration des nombres entiers...) et de mesure (construction des quantités physiques et spatio-temporelles...); ces opérations sont décisives pour l'élaboration de la connaissance, la régulation des actions, le remplacement du tâtonnement empirique par le calcul sur les représentations. On sait aussi que les premières notions qu'en a l'enfant s'élaborent de façon précoce à partir de ses actions sur le monde.

Comme pour les notions précédemment vues, cette élaboration dépend des représentations socialisées existant, à la fois dans le proche milieu de l'enfant et dans la culture dans laquelle il vit.

L'étude du fonctionnement de l'enseignement tout comme la construction et l'analyse des situations didactiques, comportent donc une interrogation précise sur ces représentations des élèves et sur leur intervention dans les processus didactiques.

Or, les travaux de psychologie cognitive, aussi bien que les études sur les acquisitions scolaires, convergent pour confirmer la difficulté des notions sur ces mesures spatiales pour l'enfant et l'élève. Ainsi les recherches sur les conservations spatiales montrent que si les premiers acquis commencent relativement tôt, c'est néanmoins pendant la période de scolarisation : c'est en effet vers 7-8 ans qu'apparaissent les réponses stables de conservation de la longueur et de la surface comme "étendue" (quantité intensive, ou encore quantifiée, mais avec des comparaisons d'ordre).

L'acquisition de la conservation pour l'ensemble des mesures spatiales est un processus de longue durée qui se poursuit pendant l'adolescence. Les bilans effectués à la fin de l'enseignement primaire montrent, par une autre approche, les difficultés des acquisitions scolaires correspondant à ces notions : échecs considérables à la fin du CM2 pour les calculs de périmètre et de surface de rectangles, et pour les changements d'unités. Les conceptions erronées sur la nature dimensionnelle des mesures se traduisent par exemple par des calculs de surface ou même de volume de type "périmétrique" (additionner des longueurs).

Différenciation et coordination de propriétés

Ces observations rejoignant celles sur les conservations des périmètres et surfaces, renvoient fondamentalement aux problèmes rencontrés par les enfants et les élèves dans l'acquisition des relations entre les différentes mesures spatiales considérées initialement comme des quantités d'objets physiques occupant une certaine place dans l'espace. Ces relations, qui déterminent la dimensionnalité relative de ces mesures, mettent en oeuvre un double processus de différenciation et de coordination. Différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord / la surface intérieure ; la surface d'un solide / son volume) et coordination de ces propriétés non seulement qualitatives (une ligne a une dimension, une surface deux, un volume trois) mais quantitative, aboutissant aux équations aux dimensions $S = L \times L$, $V = S \times L = L \times L \times L$ et aux calculs de mesures.

Nous retrouvons ici le problème plus général de la coordination multiplicative, y compris sur le plan "qualitatif". De plus le caractère multiplicatif des rapports entre longueur, surface et volume se traduit également par les propriétés de bilinéarité de la mesure de surface et de trilinéarité du volume par rapport aux longueurs : nous voyons ici se recouper le champ conceptuel des mesures spatiales et le champ conceptuel des structures multiplicatives numériques. Nous ne développerons pas ce versant des problèmes, qui fait l'objet de nombreux travaux de Vergnaud, Rouchier, Ricco.

Le problème de l'unité et du mesurant "objet"

Par rapport au problème d'ensemble de la coordination multiplicative, il faut souligner pour ces quantités "continues" que sont les mesures spatiales l'exigence d'une étude particulière des notions de "mesurant" et d'unité.

Lorsqu'il s'agit de cardinaux finis - situation que nous rencontrons avec le produit cartésien considéré ici - la notion d'unité est évidente : dans les opérations de dénombrement le choix du mesurant ne se pose pas : 1 est 1. En revanche, pour la longueur comme pour la surface, le volume (et les autres quantités physiques, d'ailleurs) le choix d'un mesurant qui aura fonction d'unité est essentiel pour l'arithmétisation de la quantité. Suivant le mesurant et l'élément mesuré il est, ou non, possible de passer d'une quantité "intensive" à une valeur numérique. A cette question générale pour les problèmes de mesure, qui rejoint celle de la constitution de la droite numérique, s'ajoutent des problèmes spécifiques pour la surface et le volume, liés à l'existence de mesures directes.

Pour la surface, un mesurant ne peut fonctionner que s'il est une forme qui pave le plan, et si l'élément à mesurer est pavable par cette forme. C'est le cas - dominant dans l'enseignement - où le mesurant est un pavé rectangle ou carré et où les "mesurés" sont rectangulaires (bien choisis...).

Or une figure comme le disque, bien que non pavable par des rectangles ni quelque pavage régulier que ce soit, n'en a pas moins une surface... Pour le volume s'ajoute une autre difficulté : si, pour la surface plane il est possible d'effectuer un pavage soit au niveau des représentations graphiques soit au niveau des réalisations matérielles par des recouvrements obtenus "en passant dans $\mathbb{R}^3$", la structure même de l'espace de nos activités matérielles nous interdit semblable opération pour le volume. Ainsi dès l'instant où l'on a composé un volume matériel on n'en voit plus que la surface - et encore pas dans son intégralité.

L'établissement des relations multiplicatives

Si nous considérons maintenant des unités pavant le plan et des surfaces pavables, l'établissement des relations multiplicatives ne va pas pour autant de soi. Prenons l'exemple de pavés formés de triangles équilatéraux ; que l'on prenne aussi bien un parallélogramme qu'un triangle équilatéral, construits sur ce pavage, il est bien difficile, sans un travail arithmétique, de faire apparaître le caractère multiplicatif de la surface par rapport à la longueur...

En fait la situation paradigmatique qui met en évidence le caractère bidimensionnel de la surface par rapport à la longueur est celle où les pavés sont construits à partir de la structure produit du plan, comme produit de segments (c'est-à-dire rectangles ou parallélogrammes). La structuration de l'espace en "n lignes xp colonnes" introduit alors une relation étroite entre le produit cartésien fini, le repérage spatial et le produit numérique scolaire n x p.

Il faut souligner que le caractère bidimensionnel de la surface n'en découle qu'à un certain nombre de conditions : que le décompte des unités n'en reste pas au dénombrement additif, que la structure organisant les unités (de surface) en lignes et colonnes soit reconnue, que la relation soit faite entre le nombre p d'unités - surface qu'il y a par ligne et le nombre p d'unités - longueur qui mesure le côté correspondant. (Il faut simultanément reconnaître qu'il s'agit du même nombre p et de deux unités différentes...).

Il faut y ajouter une condition centrale portant sur le domaine de validité : le caractère bidimensionnel doit concerner la mesure en tant qu'opération générale sur les "bonnes" parties du plan et pas seulement la mesure de formes "produit" comme le rectangle ou le parallélogramme.

Le caractère relatif de la dimensionalité des mesures spatiales

L'existence de mesures effectives du volume et de la surface introduit une conception "relativiste" de la dimensionalité : grâce aux caractéristiques des liquides, on peut en effet mesurer directement certains volumes par repérage de niveau. De manière voisine, en identifiant les surfaces à des volumes d'épaisseur constantes on peut les mesurer via le poids, par exemple, en utilisant un "isomorphisme de mesure" volume - poids. Ces opérations de mesure directe traitent alors les mesures spatiales comme "unidimensionnelles" (aucun rapport de dimensions n'y intervenant). Cette "unidimensionnalité" est cohérente avec les premières notions intensives des quantités spatiales, ce qui peut rendre plus difficile le dépassement conceptuel exigé par l'appropriation de la bidimensionalité.

L'intervention de l'enseignement

L'enseignement intervient donc sur un objet très complexe, qui entretient un réseau multiple de relations avec des notions relevant de plusieurs champs conceptuels. Une des conséquences de cette complexité nous paraît être le report des questions conceptuelles à des niveaux d'enseignement tardifs, lors de la formalisation de la théorie de la mesure et de l'intégration, et la réduction de l'essentiel de l'enseignement obligatoire à un seul aspect : l'arithmétisation des notions, les calculs de périmètres, surfaces et volumes. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre portant sur les effets macroscopiques de l'enseignement.

Nous allons introduire maintenant brièvement les caractères qui distinguent les mesures spatiales de quantités physiques, dont l'acquisition est contemporaine, à la fois dans le développement cognitif et dans le processus de l'enseignement.

Caractères spécifiques des mesures spatiales dans le développement cognitif

D'une part elles sont à l'articulation de concepts "physiques", relatifs aux propriétés des objets matériels, à des mesures et à des transformations sur ces objets, et de concepts "spatiaux", qui interviennent dans l'organisation des activités cognitives sur l'espace : ce n'est pas le cas pour d'autres quantités comme la masse, le poids, ni pour la mesure probabiliste, ni pour le temps qui occupe une autre place très spécifique.

D'autre part elles exigent une coordination de concepts à caractère "géométrique" portant sur une représentation qualitative de l'espace, et de concepts numériques, débouchant sur le progrès décisif dans le développement cognitif que constitue le calcul des mesures.

Un double processus de mathématisation est ainsi à l'oeuvre dans l'élaboration des concepts spatiaux, qui en tout état de cause ne peut relever d'une problématique psychologique qui ne prendrait pas en compte le processus même de l'enseignement. On constate d'ailleurs que dans le champ considérable des recherches sur le développement cognitif effectuées à partir des conservations, les conservations spatiales sont peu étudiées ès qualités, et ce sont essentiellement le fait d'études d'épistémologie piagétienne : la situation par rapport à l'objet de connaissance du sujet est donc fort différente de celle des études psychologiques sur la combinatoire ou le repérage spatial, qui sont nombreux ou l'ont été (ainsi le champ d'étude de l'"acquisition de conception" et des changements de dimension pertinente au cours d'un apprentissage conceptuel a marqué pendant de longues années les recherches, en particulier d'orientation théorique "behavioriste").

Les mesures spatiales dans le processus d'enseignement

Dans le processus d'enseignement lui-même, le statut des mesures spatiales les distingue des quantités physiques dont l'acquisition des notions est contemporaine : celles-ci deviennent des objets d'enseignement de la physique, alors que les quantités spatiales demeurent des objets d'enseignement mathématique attestés : la place de la mesure et de l'intégration dans l'enseignement supérieur en est une manifestation, comme la question de "métrisation" d'autres espaces que $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^n$).

Néanmoins les mesures spatiales, y compris la surface et le volume, deviennent rapidement, dans le cursus scolaire obligatoire, des objets d'enseignement obsolescents : l'élève les rencontre comme objets de connaissance pratique à la fin de l'enseignement élémentaire et en apprend des formules de calcul, les revoie - brièvement en général - au début du premier cycle du secondaire, et ne les rencontre plus, ensuite, que comme supports éventuels d'autres notions. C'est seulement en fin du second cycle, dans les sections scientifiques, que les mesures spatiales retrouvent un statut d'objet d'enseignement reconnu.

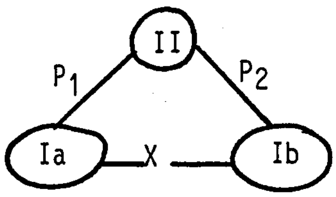
Une étude historique approfondie pour laquelle nous ne sommes pas armée serait nécessaire pour analyser les raisons de ce phénomène d'obsolescence - qui s'est par ailleurs accompagné en France, au moins, d'une réduction considérable de la part de mathématisation dans l'enseignement mathématique (malgré les efforts d'un certain nombre d'enseignants, y compris dans l'élaboration de manuels), et qui se traduit, comme nous le verrons, par une insuffisante prise en compte de l'ensemble des concepts en jeu.

C H A P I T R E   II

OBJECTIFS ET METHODOLOGIE GENERALE

Le travail présenté ici est essentiellement orienté vers l'analyse des étapes de la constitution d'un invariant opératoire, qui correspond dans les représentations du sujet au concept de bidimensionalité.

Qu'il s'agisse en effet de combiner des formes et des couleurs, de repérer un point dans un quadrillage, de traiter la mesure de surface comme produit de mesures linéaires, on peut considérer dans chacun des champs conceptuels une organisation à trois places, avec des "noeuds" et des relations, comme l'indique le schéma ci-dessous.



Les places II, Ia, Ib "contiennent", suivant les cas, respectivement :

- F x C, F et C ;
- I x J, les "horizontales", les "verticales" ;
- S - mesure de surface -, la "longueur" et la "largeur" (en tant que dimensions indépendantes).

Cette organisation est structurée par les projections de II sur Ia et Ib, Ia et Ib sont indépendantes et permutables. Au niveau du modèle mathématique, le produit cartésien solution d'un problème universel est sans doute ce qui reflète le mieux cet invariant opératoire

Il est clair que nous visons un invariant qui est situé à un niveau d'analyse très difficile à opérationnaliser : néanmoins, dans l'enseignement, la place du produit cartésien comme objet de savoir mathématique est affirmée relativement tôt (premier cycle du second degré).

Notre objectif global ne s'opérationnalise ainsi pas directement dans nos recherches mais il les a orientées et il a contribué à déterminer leur organisation. Des objectifs plus directement opératoires ont été définis : nous allons les présenter, préciser les problèmes méthodologiques qui en découlent, et cerner les hypothèses de travail que nous avons faites et les décisions que nous avons prises.

1. LES OBJECTIFS : NIVEAU GENERAL ; PREMIERS APERÇUS METHODOLOGIQUES

1.1. Nous qualifions ce niveau de macroscopique au sens suivant : travaillant dans une perspective didactique, nous recherchons des invariants relativement généraux aussi bien par rapport à la diversité des élèves et des classes que selon la variété des situations-problèmes concrètes.

C'est un objectif très fort : il nous conduit à mettre en avant les problèmes de domaine de validité. Il faut rappeler que le traitement d'une classe comme une entité suppose implicitement l'existence de tels invariants (1).

En fait, nous ne supposons pas que tous les enfants suivent une trajectoire cognitive unique dans la construction de leurs connaissances ; des travaux récents sur l'acquisition de notions comme celles de l'inclusion par exemple montrent (au contraire des conclusions piagétiennes concernant un sujet "épistémique" subsumant les trajectoires réelles des sujets) la forte présomption d'existence de processus différents pour l'appropriation de concepts. (J. Lautrey, J. Bideaud,1983). Nous supposons néanmoins que nous pouvons marquer des étapes relativement invariantes : nous pensons en effet que les caractères propres aux objets étudiés, à savoir leur structure combinatoire simple, ainsi que le choix des réalisations familières comme la forme et la couleur, ne sont pas a priori susceptibles de donner lieu à d'importantes différences de trajectoire

(1) Cela ne signifie pas pour autant que la didactique n'ait pas à prendre en compte les résultats des recherches sur ces questions.

cognitive ; en ce qui concerne l'espace, les objets étudiés peuvent être plus complexes en particulier pour tout ce qui a trait aux changements de point de vue du sujet avec la coordination de l'espace "visuo-moteur" de ce qu'on peut voir et manipuler et du système des déplacements du sujet. Notre hypothèse d'invariance, appuyée sur les reprises multiples de travaux piagétiens sur le développement opératoire, se limitera au domaine de la dimensionalité, non des autres caractéristiques.

Nous n'étudierons les différences que dans la mesure où nous estimons qu'elles peuvent se traduire en terme de variables didactiques, c'est-à-dire d'éléments sur lesquels l'enseignant a prise dans la conduite de sa classe. Ainsi excluons-nous, par exemple, les interactions fines du matériel avec les procédures des enfants qui construisent un produit E x F.

L'étude de ces interactions a été au coeur de tout un ensemble de recherches en psychologie : étude de l'acquisition des concepts et leur modélisation, recherche d'explications sur les différences de comportement observés selon que le sujet doit passer d'une dimension à une autre (reversal-shift) ou au contraire d'une valeur à une autre à l'intérieur d'une même dimension, effets de la nature des dimensions sur "l'additivité des indices", analyse des préférences dimensionnelles en rapport plus ou moins direct avec les problèmes de perception.

La reprise de telles questions ne fait pas partie de nos objectifs : notre analyse des procédures effectives utilisées par les enfants est liée à une recherche d'invariants, pour une classe de matériel que nous essayons de délimiter, et non à la mise en avant d'effets propres à une situation spécifique. (1)

---

(1) Rien n'interdit sur le plan théorique d'envisager que ce problème soit plus tard intégré à des préoccupations didactiques, lors de la fabrication de didacticiels par exemple.

Dans le même sens, à propos de l'étude du repérage spatial, nous cherchons à dégager les invariants géométriques que les enfants prennent en compte à tel ou tel moment de leur développement car ce sont des notions sur lesquelles l'enseignant pourra s'appuyer et agir pour faire fonctionner la dialectique de "l'ancien et du nouveau" (pour construire des situations dans lesquelles les invariants acquis ne permettront qu'une résolution partielle et pour lesquelles la construction de nouvelles notions sera nécessaire).

En revanche, l'analyse des balayages oculaires, qui constituent la base physiologique concrète d'exploration par l'enfant d'un dispositif spatial, ne rentre pas, elle non plus, dans nos objectifs : l'intervention à ce niveau échappe à l'heure actuelle à l'enseignement (1).

De même, les différences éventuelles entre garçons et filles (objet important dans le débat théorique en psychologie sur les bases biologiques des activités sur l'espace) seront éventuellement signalées comme des données que l'enseignant peut être conduit à prendre en compte en tant que contraintes dans les situations didactiques, mais elles ne seront pas étudiées systématiquement.

Cela étant, nous nous sommes aussi placée à des niveaux plus particuliers en fonction d'objectifs plus spécifiques : en effet pour chacun des trois domaines - produit de dimensions, représentation du plan, mesures spatiales - nous cherchons non seulement à dégager des invariants mais aussi à délimiter le domaine de validité de ces invariants.

Ceci ne relève plus du niveau macroscopique car nous sommes alors conduit à étudier des points éventuellement très particuliers.

---

(1) Voir note de la page précédente.

Pour prendre une image, dans chaque champ conceptuel nous avons regardé notre objet d'étude de plusieurs points de vue, à une distance présumée suffisante pour en avoir une vue d'ensemble, dégager de grands traits d'organisation, tout en faisant un certain nombre de "gros plans" sur des points plus précis (ainsi nous avons testé des modèles de réponse pour les bijections produit et le repérage spatial ; nous avons étudié les effets de représentations graphiques sur la mise en oeuvre de procédures de calcul de surfaces..).

L'objectif didactique de notre travail se traduit également par une étude "macroscopique" sur l'enseignement dans les champs conceptuels liés au produit, étude conduite à travers les manuels scolaires et abordant la dimension historique (1).

Cette étude des manuels vise à mettre en évidence l'existence de très forts invariants depuis le début de l'enseignement de masse (mi-19ème siècle) et à rapporter ces invariants à l'évolution cognitive des enfants que nous cherchons par ailleurs à éclairer.

1.2. Premier aperçu méthodologique

L'existence de différents niveaux d'analyse dans notre travail se traduit par l'utilisation d'un éventail de méthodes :

- comparaisons de réponses individuelles à diverses situations, présentées en entretiens individuels, en questionnaires, ou recueillies directement dans des situations scolaires ;

---

(1) Les relations entre les manuels et l'enseignement réel effectué par chaque maître sont un objet d'étude non abordé ici. Un travail de Michèle Kastenbaum (1983) sur le point particulier de l'enseignement initial de la mesure de surface en CM2 conforte l'hypothèse que les invariants généraux des manuels sont aussi ceux des enseignants; les uns et les autres relèvent probablement des mêmes systèmes de représentation des notions et de leur enseignement. Des sondages sur le produit et sur le repérage vont dans ce même sens.

- étude de procédures au niveau d'un sujet ou d'un groupe de sujets ;

- comparaison de réponses d'ensemble (dans une classe ou à un âge donné) ;

- construction et expérimentation de séquences didactiques ;

- étude clinique de l'évolution de groupes d'élèves au cours de plusieurs séances d'une séquence didactique.

Les relations entre les études individuelles et les études de groupe sont abordées dans les problèmes méthodologiques, à propos de la représentativité des sujets, dans le cours de ce chapitre.

Nous allons résumer les différentes méthodes utilisées pour les différents points de notre travail.

Pour l'étude du produit cartésien ensembliste, près de 500 enfants de maternelle au CM2 ont été confrontés à des situations-problèmes diverses en passation individuelle d'entretiens planifiés.

L'enregistrement des réponses (productions successives, verbalisations..) a été effectué par l'observateur : des fiches prévoyaient le déroulement de l'épreuve et l'inscription des réponses des enfants (1). Les verbalisations ont toujours été brèves - et sans problèmes de notation dans la mesure où aucune exploitation n'était envisagée concernant le langage lui-même (2).

Pour l'analyse du repérage dans le plan près de 300 enfants de 4 à 8 ans ont été observés en passation individuelle d'épreuves standardisées (3).

---

(1) Selon les situations, l'expérimentation était indépendante : chaque enfant était confronté à la même succession de questions, ou dépendante : la situation des questions dépendait des réponses antérieures de l'enfant.

(2) Des comparaisons entre notes de l'observateur et magnétophone nous ont confortée quant à l'hypothèse d'une fiabilité des notes par rapport aux objectifs visés.

(3) Je voudrais particulièrement remercier Elena Porro, alors chercheur sous contrat, pour sa participation à cette recherche.

En ce qui concerne les mesures spatiales, 260 élèves de CM1 à 4ème ont répondu à des questionnaires, en passation écrite, en classe, questionnaires portant sur un ensemble de notions. Par ailleurs, des points plus précis ont été explorés dans des situations scolaires de "contrôle" en 5ème et en 4ème.

Enfin, nous avons analysé certaines séances d'une séquence didactique sur le volume (Vergnaud et al, 1983), concernant les trois mesures spatiales.

L'étude "macroscopique" de l'enseignement faite au travers de manuels scolaires relève évidemment d'une tout autre méthodologie ; nous renvoyons pour l'explication des choix effectués au chapitre qui concerne spécifiquement l'enseignement. (Partie V)

Vue la diversité des méthodes utilisées, nous allons présenter successivement les objectifs et la méthodologie des recherches sur l'acquisition du produit cartésien puis celles du repérage dans le plan. En ce qui concerne les mesures spatiales, objectifs et méthodologie figureront au contraire dans la partie correspondante (partie IV).

2. LES OBJECTIFS CONCERNANT LE PRODUIT CARTESIEN ENSEMBLISTE ; METHODOLOGIE ASSOCIEE

Pour dégager des invariants dans l'évolution cognitive dans ce domaine, nous cherchons à constituer des hypothèses sur les représentations des enfants quant au produit des dimensions - comme la forme et la couleur - au niveau de grandes propriétés opératoires de ces représentations sur un ensemble de situations. Ce faisant, nous essayons de fournir de ces représentations un modèle en terme de structure mathématique simple. En fait on traduit des propriétés de ces représentations en terme d'actions sur la situation, et on essaie de "remonter" à partir des modifications de la situation produites par l'enfant aux règles d'action qui ont pu les produire.

Nous cherchons aussi à caractériser le domaine de validité de ces représentations et à cerner leur évolution, tant du point de vue de leur domaine de validité que de leur organisation, vers un modèle de produit cartésien.

Nous devons signaler que notre abord des représentations, qui se rattache à la recherche de modèles ensemblistes, prend de ce fait un caractère statique ; nous voulons dire par là que le temps n'est pris en compte que dans le processus de modification des représentations et non comme caractère intrinsèque de ces représentations. Il s'agit d'un choix méthodologique : nous avons construit des situations qui nous permettent, du moins est-ce là notre hypothèse de travail fondamentale, de rendre opératoire le passage des actions du sujet à son système de représentations. Néanmoins nous pensons qu'une évolution ultérieure de recherche devrait prendre en compte le caractère dynamique des représentations. Bon nombre d'indices dans divers travaux sur le développement cognitif conduisent en effet à l'hypothèse que, pour un champ conceptuel donné, des représentations dynamiques précèdent des représentations qui se sont détachées du déroulement temporel des actions réelles. Ainsi, dans deux domaines très différents, A. Robert a mis en évidence le caractère dynamique des premières représentations de la notion de convergence des suites (A. Robert, 1982) et J.L. Closset a montré le caractère séquentiel des premiers raisonnements sur les circuits électriques, et la longue rémanence de ce modèle primitif (J.L. Closset, 1983). De manière plus générale, les études sur la causalité ont mis en évidence le rôle décisif du temps. Dans le cas de la combinaison des dimensions, des représentations très proches de procédures de production des éléments sont envisageables : C x F serait ainsi représenté comme "les carrés, (puis) les ronds, (puis) les triangles" (par exemple), ce qui serait en contradiction avec la possibilité pour un *carré rouge d'être simultanément de forme carrée et de couleur rouge. L'asymétrie entre les deux dimensions que l'on retrouve nécessairement quand il faut mettre en oeuvre une procédure de production explicite, inscrite donc dans le temps, serait alors la forme première prise par les représentations organisées de la combinaison des dimensions. Nous pensons cependant que l'interaction entre cette temporalisation primitive et les caractères proprement dimensionnels du problème est trop forte, et les premiers acquis trop précoces, pour que des modèles purement dynamiques : un carré rouge est d'abord traité en carré puis ensuite "de couleur rouge", aient une longue durée de vie ; la méthodologie nécessaire à les mettre en évidence nous paraît très délicate.*

2.1. Nous allons préciser les principales propriétés fonctionnelles explorées dans nos situations.

a) Est-ce que quand un enfant combine par exemple des formes et des couleurs il considère bien que deux exemplaires d'un même couple (soit deux carrés rouges) sont identiques (ce qui est le point de vue ensembliste et non de la matérialité des réalisations). En ce cas nous nous réfèrerons par la suite à cette propriété en parlant d'unicité.

b) Dans une combinatoire de ce type (formes, couleurs) l'enfant peut-il associer à un élément de F successivement deux éléments différents de C sans considérer les résultats comme équivalents : nous parlerons dans ce cas de distributivité ; lorsque tout élément de F peut être associé à tout élément de C nous parlerons d'exhaustivité.

c) Existe-t-il une relation de "projection" de A x B sur A (respectivement B) ? Peut-on tenir compte de l'un et/ou l'autre facteur pour effectuer un rangement des éléments réalisant A x B, ou pour établir une correspondance entre A x B et un ensemble A' ? (1)

---

(1) Pour les problèmes de rapport entre les relations d'équivalence associées aux projections et les relations spatiales (ou temporelles) des éléments de A x B nous renvoyons à l'annexe, en fin de chapitre : "relations ensemblistes/relations spatiales".

d) Quelle relation existe entre la complémentation dans A et B et celle dans A x B ? En particulier l'enfant peut-il déterminer correctement le complément de (a, b) à partir de a et b, A et B, sinon quelle est l'opération effectuée ?

e) Réciproquement, quelle est la correspondance entre l'adjonction d'un nouvel élément à A (et/ou B) ?

f) Comment l'enfant résoud-il le problème de complétion d'une correspondance entre deux ensembles A x B et A' x B', lorsqu'on lui fournit une partie d'un graphe compatible avec une bijection produit ?

Les moyens mis en oeuvre pour opérationnaliser ces questions seront détaillés dans la partie expérimentale consacrée au produit cartésien ; ils ne sont pas indépendants - dans la construction des situations expérimentales - des questions qui touchent au domaine de validité des opérations des sujets.

2.2. L'exploration du domaine de validité des invariants étudiés recouvre plusieurs objectifs plus spécifiques.

Des objets peuvent ainsi être décrits à partir des mêmes dimensions - comme par exemple la forme et la couleur - mais dans des réalisations matérielles différentes : où se situent les modifications alors introduites dans le couple représentations/règles d'action ? (1).

Les relations entre les ensembles A et B peuvent elles-mêmes être différentes : les représentations sont-elles invariantes quand ces relations changent, et sinon quelles sont les différences ?

---

(1) Nous avons choisi des dimensions pour lesquelles les hypothèses de fonctionnement "ensembliste" sont raisonnables, au vu des acquis de la psychologie, pour les enfants de plus de 5 ans avec qui nous travaillons.

Plus précisément : A et B peuvent être extraits de deux référentiels différents A* et B*, ensembles de valeurs potentielles de deux dimensions étrangères comme le sont la forme et la couleur ; ils peuvent être issus du même référentiel et d'intersection vide (ils forment un ensemble de valeurs différents d'une même dimension) ; ils peuvent être issus du même référentiel et d'intersection non vide (il y a des valeurs communes à A et B) ; ils peuvent enfin être identiques, c'est le cas du carré cartésien (1).

Nous avons ici posé une hypothèse a priori sur une différence entre les deux situations A x B et A x A, nous avons dans notre travail spécifiquement testé cette hypothèse (vérifiée comme nous le verrons plus loin) ; nous allons expliciter des éléments de cette hypothèse.

Selon nous la construction de A x A implique la mise en oeuvre de deux fonctions d'indexation de A : la première fonction associe à un élément de A le couple (a, 1) qui détermine la valeur de a et sa position dans le couple (x, y) de A x A, en tant que premier élément du couple ; l'autre fonction attribue de façon analogue la position du second élément du couple.

C'est avec cette "duplication" de A en deux ensembles isomorphes A1 et A2 que peut avoir lieu la détermination de A x A comme un produit de deux ensembles ; faute de cette indexation A x A s'injecte "naturellement" dans $\mathcal{P}$(A). Une hypothèse adjointe est la complexité particulière de l'ensemble des parties de A, loin de celle du produit cartésien ensembliste.

---

(1) La notion de référentiel n'a de sens que si on considère la signification pour les enfants du matériel qu'ils utilisent. Ainsi 1, 3, 8 font partie du référentiel des nombres entiers, a, b, c.. de celui des lettres (de l'alphabet français) ; en revanche il n'y a pas de référentiel usuel pour 1, 3, a, b. De même, on ne mélange pas les formes et les couleurs.. Avec la notion de référentiel que nous introduisons ici nous sortons évidemment de la stricte représentation ensembliste pour A et B (sinon A et B sont pour le moins des sous-ensembles de A U B !), mais nous nous permettrons l'abus de langage consistant à garder les termes ensemblistes pour ne pas introduire la lourdeur de deux niveaux de langage, pour refléter les deux niveaux de représentation. Nous renvoyons à l'annexe à ce chapitre sur le matériel expérimental.

Nous faisons précisément les hypothèses suivantes :

- A x A est d'abord traité comme sous-ensemble de parties, puis la différenciation systématique de (a1, a2) et de (a2, a1) conduit à une remise en cause de cette représentation, enfin l'indexation (implicite ou explicite) constitue A x A en produit ;

- la nécessité de l'indexation et la symétrie fonctionnelle de A x A rendent la représentation du carré cartésien A x A plus difficile dans son appropriation que celle du produit "hétérogène" A x B.

2.3. La méthodologie

L'explicitation, qui précède, des objectifs visés nous semble éclairer le fait que l'étude d'un champ conceptuel - ici le produit cartésien ensembliste - met en oeuvre tout un réseau de concepts et conduit à utiliser un ensemble important de situations.

Un champ expérimental a donc été construit pour essayer de couvrir le réseau des concepts en jeu et pour répondre aux questions préalables et à d'autres éventuelles issues du déroulement même de la recherche.

Il n'y a pas de bijection entre les objectifs que nous avons présentés et l'ensemble des expériences constituant le champ expérimental : les objectifs visés sont extraits d'une analyse "transversale" des résultats obtenus dans le champ expérimental, en fonction en particulier de la cohérence d'ensemble.

Les situations-problèmes que nous avons élaborées sont présentées dans le premier chapitre de la partie suivante. Elles ont été construites pour comporter un ensemble de tâches nécessitant de chaque enfant un ensemble de réponses assez riche pour que l'on puisse aborder des problèmes relatifs à l'organisation de ces réponses.

2.3.1. Les situations choisies sont <u>ouvertes</u> ; les possibilités de réponses des enfants y sont très larges : les choix que nous observons peuvent alors bien être considérés comme résultant des représentations que les enfants se font de la situation.

Nous avons par ailleurs fait travailler les enfants sur du matériel "réel" et non symbolique, ni a fortiori formel : nous avons essayé de ne pas faire interférer avec les problèmes de combinatoire des dimensions des problèmes de codage. (A l'âge des enfants observés le langage concernant les objets considérés peut être considéré comme maîtrisé).

Ainsi, les formes comme les couleurs utilisées sont effectivement réalisées, soit dans des objets, soit dans des figures, (données par l'observateur ou construites par l'enfant) ; dans le même ordre d'idée pour que les enfants maîtrisent au maximum la signification du problème posé (même lorsqu'ils sont très jeunes) tous les ensembles produits en jeu peuvent être effectivement réalisés, dans un ordre de temps compatible avec celui du déroulement de l'ensemble de la tâche.

De plus, l'exploration du matériel produit ne nécessite pas de procédure complexe de contrôle : les cardinaux de A et B sont petits, tels que celui de A x B reste dans le même domaine de grandeur, les éléments construits sont donc sans difficulté majeure simultanément visibles et leur exploration oculaire complète compatible avec les capacités des enfants observés (plus de 5 ans).

Si nous considérons notre objectif d'explorer le domaine de validité des représentations des enfants et des règles d'action mises en oeuvre, cette condition de "réalisabilité effective" interdit, dans nos conditions expérimentales, les changements de niche informationnelle[1] : nous reviendrons sur cette question lors de notre analyse de l'enseignement.

Le choix du type de matériel utilisé (essentiellement des formes et des couleurs) est issu de l'ensemble des travaux antérieurs portant sur la

(1) Ce terme introduit par Brousseau renvoie aux caractères de fonctionnement des domaines numériques constatés : "petit" nombre (autour de la dizaine), "grands" nombres, en rapport avec les acquis des élèves dans le champ arithmétique.

combinatoire des dimensions ; il en est de même pour la détermination des domaines d'âge et de niveau scolaire : de la dernière année de maternelle à la fin de l'enseignement élémentaire. En effet dès 5 ans les formes et les couleurs fonctionnent bien de façon "ensembliste" (cf. G. Le Bonniec, 1972) ce qui est notre hypothèse de départ pour poser le problème du produit de dimensions comme relevant du champ conceptuel du produit cartésien ensembliste (cf. l'annexe de ce chapitre concernant les relations entre matériel expérimental et représentations ensemblistes). Par ailleurs, toutes les études sur les classifications multiples concluent à leur acquisition assurée vers 11-12 ans pour la quasi-totalité des enfants (pour ce type de dimensions). Avec le matériel choisi, les ordres de grandeur des cardinaux, le domaine d'âge, nous considérons que les hypothèses de travail que nous faisons sont remplies.

2.3.2. Pour de multiples raisons, il n'était pas question que chaque enfant soit placé devant l'ensemble de toutes les situations-problèmes. Nous devons donc préciser que nous faisons des hypothèses sur le caractère "représentatif" des sujets : ces hypothèses s'appliquent à l'ensemble de notre travail (et ne lui sont évidemment pas spécifiques..).

Les raisons pour lesquelles un enfant a été confronté à un ensemble significatif mais limité de tâches liées au produit cartésien sont les suivantes :

1/ Nous cherchons, à ce moment de la recherche sur la bidimensionalité, à repérer des étapes dans un processus ; or nous avons quelques raisons de penser que si une de nos situations-problèmes prise isolément ne modifie pas sensiblement l'organisation des connaissances d'un enfant - au moins dans le cours même de sa résolution - il n'en serait pas de même s'il était confronté à la succession de situations qui constituent le champ expérimental;

2/ Pour la comparaison des difficultés des produits hétérogènes C x F (1), et des produits homogènes C x C et F x F il se pose des problèmes d'éventuels effets d'ordre (2), il était donc nécessaire de pouvoir comparer les ordres de passation, or c'est sur des sujets différents que l'on peut comparer des ordres de passation différents.

3/ Certaines des questions que nous nous posons sont apparues seulement à la suite de l'analyse de situations précédemment posées ; la dynamique de la recherche nous a donc conduite également à travailler sur un même objet avec des enfants différents (et avec un décalage temporel).

Nous appuyons donc notre travail d'analyse de nos résultats sur l'hypothèse que, dans une culture donnée, des groupes d'enfants ne présentant pas de caractéristiques particulières, scolarisés dans une même structure institutionnelle, présentent un éventail de conduites globalement stable - dès lors qu'il ne s'agit pas de problèmes qui soient spécifiquement et exclusivement objets d'enseignement, ni de problèmes dépendant étroitement des activités dans l'espace (des déplacements réels).

En conséquence de cette hypothèse, nous considérons qu'une analyse "transversale" selon des groupes d'âges (et/ou des niveaux scolaires) fournit pour l'essentiel des résultats analogues à ceux d'une analyse "longitudinale" conduite sur un même groupe de sujets (3) pendant un certain nombre d'années

---

(1) "C" est mis désormais pour "couleur" et "F" pour "forme" (ou "figure").

(2) Ces effets d'ordre peuvent venir de l'utilisation dans une nouvelle situation de règles d'action issues d'une première représentation.

(3) C'est ce qu'on appelle étude d'une cohorte de sujets, ou encore une étude diachronique, opposée à l'étude synchronique de groupes différents, qui est celle que nous effectuons.

(ou de niveaux scolaires) (1).

Si nous avons explicité ces hypothèses - qui sont celles de toute la psychologie génétique - c'est tout d'abord, parce que nous les utilisons, c'est ensuite parce que la situation nous semble plus complexe s'agissant de perspectives didactiques où la question des relations entre études synchronique et étude diachronique se double de la question des rapports entre les niveaux d'âge et les niveaux scolaires.

3. REPERAGE DANS LE PLAN - BIDIMENSIONALITE SPATIALE ET BIDIMENSIONALITE ENSEMBLISTE

De très nombreux travaux de psychologie ont étudié l'évolution des connaissances de l'enfant sur l'espace, ses capacités à se situer, à situer des éléments les uns par rapport aux autres, à travailler sur des représentations spatiales et/ou à en produire, et plus généralement sur les "calculs" effectués sur les relations spatiales. Nous nous intéressons ici de manière spécifique aux rapports entre les opérations engagées par l'enfant dans le repérage dans un "plan marqué" et celles qui concernent la combinatoire du produit.

Nous cherchons à caractériser les invariants spatiaux pris en compte par les enfants dans des situations de repérage, leurs relations avec les notions de dimensionalité dans le plan (unidimensionalité des lignes, bidimensionalité du plan), le caractère de stabilité de ces invariants selon les transformations spatiales sous-jacentes à un repérage.

(1) Rappelons que l'évolution de l'organisation des représentations touchant au produit cartésien porte sur plusieurs années, ainsi qu'en témoignent par exemple les résultats déjà acquis sur les classifications multiples.

3.1. Les invariants spatiaux qui interviennent dans la représentation spatiale sont de plusieurs ordres :

- invariants topologiques : relations de voisinage, d'intérieur, d'extérieur, et de bord pour des domaines appropriés ;

- invariants affines : alignements, angles ;

- invariants métriques ;

Dans l'isomorphisme du plan à $\mathbb{R}^2$ intervient par ailleurs la coordination des invariants relatifs à chacune des deux dimensions : ainsi pour un point c entre A et B sur une dimension, un point r entre M et N sur l'autre dimension, le point (c, r) est intérieur au domaine (A, B) x (M, N) ; les invariants intérieur/extérieur sur les 2 dimensions sont coordonnés.

Les opérations effectuées par un enfant pour repérer la position d'un point dans un quadrillage déjà donné - qui "réalise" en quelque sorte un isomorphisme d'un bon domaine plan à un produit I x J de positions sur des segments - peuvent résulter de règles d'action issues des différents invariants spatiaux pris en compte.

L'analyse de l'acquisition par l'enfant des concepts liés à la dimensionalité nécessite donc de prendre en compte la variété des notions en jeu dans l'étude des actions des enfants.

Les questions auxquelles nous essayons de répondre sont les suivantes :

a) dans un repérage (sur les conditions duquel nous allons revenir dans le paragraphe 3.2.) l'enfant utilise-t-il les invariants topologiques : un point placé sur le bord du quadrillage par l'expérimentateur sera-t-il placé par l'enfant sur le bord de son propre quadrillage ? De même un point intérieur sera-t-il placé par l'enfant comme intérieur sur son propre quadrillage ?

b) dans le repérage d'un point l'enfant conserve-t-il les relations affines : les angles du quadrillage sont-ils repérés comme tels ?

c) l'enfant utilise-t-il des relations métriques, respectant la "place approximative" des points ?

d) dans le repérage des points y a-t-il conservation d'une des "coordonnées" ? des deux ?

3.2. Ces questions générales sont posées pour des situations de repérages construites de la manière suivante : l'enfant a devant lui un quadrillage régulier de 6 "horizontales" (c'est-à-dire parallèles à son plan fronto-parallèle) et de 6 "verticales" perpendiculaires aux précédentes ; l'expérimentateur a devant lui un quadrillage identique. Après une phase de familiarisation avec le matériel et la consigne (placer un pion au même endroit que l'expérimentateur mais sur son propre quadrillage) l'expérimentateur place un même pion successivement sur 16 positions, lors de chaque placement l'enfant doit placer son propre pion au même endroit sur son quadrillage.

Les positions correspondent aux 4 angles, à 4 points des bords, et à 8 autres points intérieurs. Les différentes positions ne privilégient ni la droite ni la gauche, ni le "haut" ou le "bas" du quadrillage.

La succession est uniforme pour tous les enfants ; selon les expériences elle est "centrifuge" : les points sont parcourus du centre vers le bord, ou "centripète" avec un ordre de parcours inverse.

3.3. Les questions générales présentées ci-dessus ont par ailleurs été étudiées en fonction des transformations spatiales impliquées dans le passage du repère de l'expérimentateur au repère du sujet pour explorer le domaine de validité des invariants pris en compte dans les opérations des enfants.

En particulier le statut relatif de la direction "horizontale" et de la direction "verticale" a été étudié en comparant les deux situations où le sujet et l'expérimentateur sont côte à côte et où ils sont face à face :

dans le premier cas une translation "horizontale" fait passer d'un quadrillage à l'autre, dans le second cas une transformation privilégiée - mais inadéquate - conserve les alignements des "verticales" : c'est la symétrie "en miroir". La question qui se pose est alors de savoir si on observe le respect d'invariants corrects dans la première situation et incorrects dans la seconde correspondant à la conservation d'une dimension particulière.

L'autre transformation utilisée est une rotation d'environ 45° qui peut être "compensée" par un mouvement de la tête de la part du sujet. L'hypothèse que nous faisons quant à l'effet des transformations est que globalement la "translation horizontale" est plus facile à prendre en compte que la rotation de 45°, mais que la différence entre ces deux situations est beaucoup moins grande qu'entre elles et la situation de face à face où la transformation effective est une rotation de 180° concurrente en un certain sens avec la symétrie en miroir.

3.4. Les situations de repérage dans des quadrillages dans lesquelles seule une marque spécifique redonne sur le quadrillage un repère d'orientation (qui est redondant avec celui issu de la place du quadrillage par rapport à l'enfant et à l'expérimentateur) mettent en jeu des relations purement spatiales. Nous avons de plus cherché à voir si des repères intrinsèques des coordonnées du quadrillage facilitaient la prise en compte du caractère bidimensionnel du repérage.

Nous avons pour cela utilisé deux types de quadrillages : un quadrillage 6 x 6 de bandes de couleurs toutes différentes et un quadrillage pour lequel seules les origines des segments étaient marqués (avec les mêmes couleurs). Par la suite les trois types de quadrillages seront respectivement désignés par :

- quadrillage noir (une pastille rouge marque le coin inférieur gauche du support du quadrillage) ;

- quadrillage couleur (isomorphe à un produit C x C', où C et C' n'ont aucun élément commun) ;

- quadrillage noir-marqué (où les origines des différents segments du quadrillage sont marquées par les mêmes couleurs).

Pour des raisons qui apparaîtront lors de la présentation des résultats des expériences nous n'avons pas utilisé tous les quadrillages pour toutes les transformations, ni pour chacun des deux ordres de succession des positions.

Par ailleurs, pour les mêmes raisons que celles présentées à propos du produit des dimensions ce ne sont pas les mêmes enfants qui ont répondu aux différentes situations. Dans la mesure où le repérage portait sur 16 positions, chaque situation de repérage apporte des informations d'ensemble sur les invariants utilisés par le sujet. De plus la complexité des résultats observés pour la situation de face à face ne s'est pas laissée résoudre en modèles simples sur les règles d'action des enfants, a fortiori en est-il de même de l'ensemble de toutes les réponses d'un même enfant..

3.5. Pour étudier plus précisément la situation du quadrillage couleur, où une réponse en terme de repérage des éléments d'un produit C x C' de couleurs est a priori possible, nous avons construit une situation "déspatialisée" d'identification de points d'un quadrillage couleur à partir de la donnée du seul couple des couleurs définissant le point. Des "carrefours" formés simplement de l'intersection de deux segments de couleurs de C x C' sont présentés aux enfants, ils doivent sur leur quadrillage placer leur pion sur le bon carrefour. (On passe ensuite à une situation de repérage spatial). Dans la suite cette situation est dénommée "carrefour".

Pour toutes les situations de repérage sur un quadrillage déjà construit les sondages effectués sur notre matériel ainsi que les travaux conduits par d'autres chercheurs (M.G. Pécheux, P.M. Baudonnière...) nous ont amenée à étudier les conduites d'enfants de 4 à 8 ans soit :les deux dernières années de maternelle, le CP et les deux années de CE.

Les deux tableaux donnés au début de la partie III, présentent l'un le schéma des repérages présentés, l'autre le plan de l'ensemble des situations expérimentales utilisées avec les différents niveaux d'âge (et scolaires).

3.6. Par ailleurs nous avons rappelé que l'un de nos objectifs concerne les rapports entre l'acquisition de la bidimensionalité ensembliste et de la bidimensionalité spatiale. Certaines des situations sur le repérage spatial sont construites dans cet objectif ; de façon réciproque certaines des tâches dans les expériences sur le produit ensembliste visent le même objectif : il en est ainsi des rangements, ou des mises en relation de produits C x F dans des dispositions spatiales particulières.

De très nombreux travaux de psychologie cognitive, s'appuyant implicitement sur les rapports entre le produit et le plan ont utilisé des situations où le matériel était pré-organisé de façon "matricielle" : rangements d'éléments dans un tableau "cartésien" dont les marges sont marquées (couleurs, formes, objets significatifs..) ou construction des éléments à mettre dans les cases d'un tel tableau, ou classification spatiale de matériel "produit". Ces travaux, issus d'orientations théoriques très diverses ont apporté des résultats convergents sur l'utilisation par les enfants des dimensions ; certains, récents (M.P. Pinelli, 1978 ; Anh Ngyen Xuan et al, 1983) ont apporté des informations détaillées sur les procédures utilisées par les enfants dans ces situations, et sur des conclusions sur des apprentissages possibles de construction de produits. Nous avons ici essayé de dissocier au contraire aspect spatial et aspect ensembliste de la bidimensionalité: la confrontation des résultats apporte en retour des éléments d'appréciation sur les hypothèses que nous avons faites quant aux rapports entre les relations spatiales et les relations ensemblistes.

4. LA BIDIMENSIONALITE DES MESURES SPATIALES

Les principaux objectifs et les méthodes correspondantes sont détaillés dans l'article sur l'acquisition des notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur et surface) qui présente les résultats essentiels d'une recherche conduite sous forme de questionnaires passés en classe. Nous ne les reprenons donc pas ici et nous renvoyons pour ce qui concerne les mesures spatiales à la partie expérimentale qui leur est consacrée.

Nous devons simplement souligner ici le décalage significatif entre les niveaux d'âge (ou scolaires) considérés pour les études sur la combinatoire des dimensions ou le repérage spatial (à partir de la fin de la maternelle : 4 ou 5 ans selon les situations) et celles sur les mesures spatiales multidimensionnelles qui ne commencent pas avant le cours moyen (10 ans environ).

Ce décalage reflète, selon nous, les différences considérables de complexité d'organisation des champs conceptuels concernés, et de place prise dans l'ensemble des activités de tous ordres (et non seulement cognitives..) des enfants.

A N N E X E S

1. MATERIEL EXPERIMENTAL - ENSEMBLE EXPERIMENTAL

Nous désignons par matériel expérimental les objets, simples ou complexes, sur lesquels portent les actions pratiques des sujets : production d'un objet complexe à partir d'éléments simples, rangements, appariements... Pour le matériel expérimental deux objets semblables en tout restent deux objets. Un ensemble expérimental est une représentation ensembliste d'une partie du matériel expérimental.

La distinction fondamentale entre matériel et ensemble porte sur la relation d'identité : dans l'ensemble expérimental deux objets totalement permutables du matériel expérimental sont représentés par un seul élément. Le matériel expérimental ne permet pas toutes les opérations, en particulier celles qui mettent en jeu les relations d'inclusion, le "manipulable" impose des contraintes auxquelles échappe le "calculable".

Les relations entre matériel et ensemble se traduisent au niveau des termes de la manière suivante : l'ensemble expérimental représente un matériel expérimental, et sous certaines conditions, le matériel expérimental est une réalisation d'un ensemble expérimental. Un élément est un représentant d'un ou plusieurs objets du matériel, et un objet est un exemplaire d'un élément. Nous parlerons de doubles, ou plus généralement de multiples lorsqu'il y a plusieurs exemplaires d'un même élément.

Le passage du matériel expérimental à la représentation ensembliste se situe à deux niveaux :
celui de l'observateur, celui du sujet. Les problèmes que nous étudions dans l'acquisition de la bidimensionalité concernent en premier lieu la question de déterminer si les matériels considérés constituent pour l'enfant des réalisations d'ensembles "calculables ou plus exactement de préciser dans quelles conditions il en est ainsi.
Par exemple si nous considérons des objets constitués de surfaces - pleines - colorées et de formes linéaires également colorées, selon les opérations à effectuer les surfaces de même contour que les figures pourront ou non leur être identifiées, les unes et les autres étant alors représentées par les éléments d'un même ensemble F de formes. Mais pour une classification concrète correspondant pa exemple à une relation matérielle d'encastrement il pourra en être tout autrement..
Cette question nous paraît essentielle à garder dans le champ des problèmes méthodologiques, dès lors que nous voulons pouvoir évaluer des domaines de validité.

L'hypothèse faite est la validité de la représentation ensembliste pour des matériels portant sur des formes, des couleurs, elle ne préjuge néanmoins pas du fait que les réalisations différentes des "mêmes" ensembles de formes ou de couleurs soient équivalentes : nous y reviendrons avec le problème des rapports interdimensionnels dans les produits de type C x F.

Critères - Indices - Descripteurs - Dimensions

Les propriétés de la représentation ensembliste dépendent des relations qui existent entre les objets du matériel expérimental. Deux opérations interviennent de manière déterminante : ce sont la substituabilité et l'extension, qui sont liées au caractère d'homogénéité ou d'hétérogénéité interne. Lorsque les objets expérimentaux sont différenciés par la présence ou l'absence d'éléments - c'est à-dire qu'aucune permutation simple ne fait passer d'un objet à un objet différent - nous dirons que ces éléments constituent des indices. (cf. Vergnaud, 1972). Le matériel est hétérogène.

Lorsque deux objets différents du matériel peuvent être déduits l'un de l'autre par la permutation d'un élément (ou plusieurs) nous dirons que le matériel peut être analysé en fonction d'un ou plusieurs descripteurs, dont les valeurs sont les éléments substituables.

Lorsque l'ensemble des valeurs du descripteur peut être étendu, de sorte que toutes les opérations cognitives envisagées sur le matériel initial gardent leur statut, nous dirons qu'il y a un référentiel implicite (ou explicite si référence est faite à un ensemble emboîtant de valeurs).
Si de plus, les caractères des descripteurs ne peuvent être détachés des objets du matériel expérimental nous dirons qu'il s'agit de dimensions.
Ce dernier cas concerne par exemple les objets de formes colorées, ou les formes de différentes tailles.
La propriété d'extension dépend à la fois du matériel et du sujet : lorsqu'on peut supposer qu'il y a propriété d'extension pour le sujet nous parlerons d'éléments significatifs. Ainsi un matériel constitué de cartes portant un couple de lettres de l'alphabet grec n'est significatif que pour celui qui peut reconnaître l'appartenance de ces lettres à un alphabet (1).

La possibilité de détachement des caractères d'un descripteur opposée au fait que les valeurs d'une dimension sont constitutives du matériel est une condition qui exprime en fait la relativité de la notion de dimension par rapport au matériel considéré. Ainsi, la

(1) Il existe alors pour le sujet un référentiel qui est celui de l'alphabet grec.

couleur est une dimension au sens consacré du terme par la psychologie, elle peut être combinée avec d'autres dimensions comme la taille, la texture, la brillance.. Elle peut aussi fonctionner à titre de descripteur, ou certains de ses caractères à titre d'indices. Elle garde néanmoins un caractère particulier dû à son statut cognitif dans l'ensemble des activités possibles du sujet. C'est l'existence de ce statut général qui nous fera parler de la dimension couleur.

Les problèmes posés par la psychologie cognitive concernant les caractéristiques des matériels et des situations qui permettent de supposer une représentation ensembliste sont loin d'être tous résolus ; les matériels que nous avons pour notre part utilisés sont construits à partir de descripteurs et/ou de dimensions classiques pour nous permettre de poser le problème du produit d'ensembles.

Les rapports entre les représentations ensemblistes de l'ensemble de la situation expérimentale, ce qu'on peut appeler aussi le dispositif expérimental, sont brièvement repris dans le tableau de la partie sur le produit cartésien.

2. LA LIMITATION DES CARDINAUX DES ENSEMBLES EN JEU

Dans nos expériences, les ensembles expérimentaux sont réalisés par des matériels expérimentaux ayant donc un nombre fini d'objets : ainsi les ensembles expérimentaux ont a priori un cardinal fini, de plus nous avons choisi des réalisations effectives par des enfants ce qui nous a conduit à des cardinaux petits. L'ensemble de ces contraintes pose des problèmes méthodologiques.

Un premier problème théorique autant que de méthode est posé par le traitement que nous pouvons alors faire de l'équivalence entre des définitions du produit cartésien ensembliste : en particulier la définition de A x B comme solution d'un problème universel, qui met en jeu une quantification en "quel que soit", implique de ne pas se placer dans le domaine du fini qui est celui des dispositifs expérimentaux. Or nous avons justement choisi pour toute une classe d'expériences qui portent sur la combinatoire des dimensions des matériels expérimentaux certes finis mais qui peuvent apparaître comme des réalisations finies d'ensembles <u>possibles</u>, qui eux ne sont pas nécessairement de cardinal fini, à savoir les ensembles de valeurs potentielles des descripteurs ou dimensions utilisées. De ce point de vue toutes les expériences qualifiées d'apprentissage ou d'identification de concepts mettent en jeu des extensions du matériel initialement présenté au sujet : l'identification du concept est ainsi le passage d'un modèle sémantique (où ce sont les contenus effectivement présentés qui déterminent le concept à chaque phase de l'expérience) à un modèle "syntaxique" où ce sont des propriétés ou des relations (et non des contenus) qui déterminent la réponse du sujet. Pour prendre un exemple : on ne peut pas identifier le concept de "rouge" ou de "carré" à l'ensemble fini des objets rouges ou carrés présentés au sujet à un moment donné de son histoire puisqu'à partir d'un certain moment il sera capable d'un tri "rouge"/"non-rouge" pour tout nouveau matériel expérimental. Il en est de même pour la couleur : en témoigne le fait que le jeune enfant peut poser la question "quelle est la couleur de..". Nos problèmes d'extension des ensembles de base du produit tout comme ceux de changement de bijection sont justement destinés à attester le dépassement du caractère fini du matériel.

En revanche un deuxième problème méthodologique demeure quand il s'agit d'analyser des procédures effectivement produites par des enfants pour "remonter" à leurs règles d'action : la nature des procédures est nécessairement étroitement liée aux caractères réels du matériel : des procédures que nous serions tentée de qualifier de "faibles" peuvent s'avérer productrices d'ensembles complets dans les cas de cardinaux petits alors que le passage à des cardinaux plus grands conduisant à l'échec ces procédures pourrait éventuellement faire émerger des procédures plus fortes, et reflètant mieux les représentations des enfants, ou s'avérant des moyens de faire évoluer ces représentations : la méthodologie choisie en vue d'obtenir un ensemble de réponses sur un ensemble de tâches ne nous permet effectivement pas cette exploration des règles d'action et des représentations au travers des évolutions de procédures. Nous faisons l'hypothèse que l'élargissement du champ expérimental nous permet une analyse équivalente des représentations. Rien ne nous assure en revanche, même sous cette hypothèse, qu'il en est de même pour l'action sur les représentations, nous y reviendrons dans la discussion après l'étude des manuels scolaires à propos du produit ensembliste, des repérages, et des applications.

3. LIAISON ENTRE LES DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX MATERIELS ET LES OPERATIONS HYPOTHETIQUES DU SUJET

Nous allons aborder dans ce paragraphe un autre problème de représentation : celui de la représentation de relations ensemblistes par des relations spatiales et/ou temporelles de proximité.

Par exemple, dans un produit de $E = A \times B$, nous pouvons considérer la relation ensembliste $e \; R \; f$ si e et f ont même projection a sur $A \times B$ c'est-à-dire si $e = (a, b)$ et $f = (a, b')$. C'est une relation d'équivalence, qui permet de définir des classes d'équivalences : $a \times B$, $a' \times B$, etc.

Au niveau de la situation expérimentale elle-même, et des réponses des sujets, les questions posées concernent un matériel expérimental, et des actions effectives sur ce matériel expérimental. Ce matériel expérimental intervient dans une présentation à la fois spatiale et temporelle.

La disposition spatiale et/ou la succession temporelle imposées au matériel expérimental (avec des contraintes expérimentales éventuelles) induit des relations entre les objets du matériel expérimental : relations de proximité ou de contiguité spatiales et temporelles.

Il convient de se poser le problème de la liaison, supposée ou déduite d'autres hypothèses plus générales, entre les proximités spatiales ou temporelles, les relations de contiguité ou d'enveloppement dans le matériel expérimental, et les relations ensemblistes intérieures au modèle.

Nous traiterons d'abord cette question dans le cas des relations spatiales, que celles-ci soient imposées comme simple résultat d'actions pratiques, ou qu'elles soient établies par des mises en relations de l'expérimentateur ou du sujet.

3.1. Relations spatiales et relations ensemblistes dans le modèle du sujet

Nous allons préciser les relations spatiales envisagées. Elles comprennent : les relations de contiguité, les relations d'enveloppement, et les relations de proximité. Nous traiterons essentiellement le cas de ces dernières, les relations de contiguité pouvant s'en déduire comme cas particulier.

Notons ici que les relations dont nous parlons doivent être envisagées plutôt comme des relations relatives que comme des relations binaires absolues : "A est près de B" signifie presque toujours "A est plus près de B que les autres objets du matériel" La notion de proximité devra donc être entendue comme une notion de proximité relative.

A - Il peut paraître curieux de parler des relations de proximité spatiale, alors qu'il existe sur l'espace une distance euclidienne "canonique" qui devrait suffire à déterminer une relation de proximité spatiale.

Ce pluriel est justifié par la remarque qu'on peut définir une notion de proximité dans deux systèmes différents :

a) dans l'espace physique, assimilé à un espace euclidien, muni de sa distance "canonique" invariante par tout déplacement (canonique à une homothétie près, c'est-à-dire à l'unité de mesure près).

b) dans un espace perceptif, ou un espace dérivé par une opération de représentation.

Dans le premier système nous pouvons remplacer l'étude des relations de proximité par l'étude des distances des objets du matériel, encore que si la distance des deux points est définie de manière parfaitement univoque il n'en est plus de même de la distance des deux parties de l'espace (celles occupées par les objets du matériel expérimental). Donc il se pose déjà le problème du choix de cette notion de proximité pour des objets non ponctuels.

Dans le second système l'espace ne peut pas être considéré comme homogène dans toutes ses dimensions, si on détermine cette homogénéité par des comparaisons utilisant l'espace physique comme intermédiaire. De nombreuses expériences ont montré que l'espace perceptif ne pouvait être identifié à l'espace euclidien et qu'en particulier on ne pouvait pas le considérer comme homogène dans chacune des directions définies à partir du point de vue du sujet.

En particulier, si nous nous limitons à des situations concernant un plan, la surestimation des "verticales" par rapport aux "horizontales" rend nécessaire la distinction entre les rapports de proximité - envisagés dans le plan perceptif - et les rapports de distance euclidienne.

De plus, l'étude des balayages oculaires d'une surface plane possédant verticales et horizontales montre le privilège dans l'exploration active d'une configuration, des balayages horizontaux ; les résultats expérimentaux obtenus sur ce point nous ont conduit à privilégier parmi les relations de proximité la "proximité horizontale"..

D'autre part, nous ne pouvons pas postuler a priori que les relations de proximité répondent aux conditions de symétrie et d'inégalité triangulaire de la distance.

En particulier s'il existe des "éléments de référence" ils peuvent introduire une "déshomogénéisation" de l'espace (cf. par ex. E. Rosch, 1975).

Une fois faite cette remarque concernant les relations de proximités spatiales que nous envisageons de mettre en liaison avec des relations ensemblistes du modèle, nous allons préciser les différentes situations dans lesquelles on peut ou doit se poser le problème du contenu de cette liaison.

B - Pour toutes les notions de proximité spatiale que l'on peut envisager, il est souhaitable de dissocier les problèmes posés par la liaison "relations ensemblistes" - "relations de proximité" en 3 classes :

1/ Les proximités qui sont la conséquence des actions du sujet destinées justement à mettre en relation des objets du matériel expérimental (et éventuellement des éléments de l'ensemble expérimental, si on se place au niveau du modèle).

2/ Les relations de proximité qui sont une donnée de la situation expérimentale devant laquelle on place le sujet.

3/ Les proximités qui sont l'effet indirect d'une action soit de l'expérimentateur, soit du sujet.

Dans la première classe on peut citer comme exemple : les classifications en général et plus précisément en ce qui concerne nos expériences les rangements spatiaux d'un matériel, donné par l'expérimentateur ou bien construit par le sujet ; ces rangements s'effectuant éventuellement avec une contrainte sur le type de disposition spatiale de ce rangement, suivant un tableau, rectangulaire, de cases données à l'avance par exemple.

Dans la seconde classe entrent toutes les situations expérimentales dans lesquelles le matériel expérimental qui réalise les éléments d'un ensemble n'est pas présenté au sujet item par item, dans une séquence exclusivement temporelle : il en est ainsi dans tout état de la situation où une partie, non réduite à un seul objet, du matériel est disposée devant le sujet comme une donnée de la situation. Il en est ainsi de l'état initial précédant une classification par le sujet.

La troisième classe enfin contient en particulier tous les cas où une disposition spatiale du matériel est la conséquence indirecte d'une succession temporelle soit de présentation du matériel, soit de sa construction par le sujet. Dans le dernier cas, (action du sujet), il y a interférence entre les proximités spatiales et les relations de proximité temporelle.

Nous allons expliciter un certain nombre d'hypothèses relatives au premier cas, où les relations de proximité sont déterminées par une activité propre du sujet. Puis nous présenterons le second cas où les contraintes spatiales sont une donnée de la situation choisie par l'expérimentateur. Nous indiquerons quelle nous paraît être la différence essentielle entre ces deux occurrences de la liaison "reltions ensemblistes - relations spatiales". Nous signalerons enfin, brièvement, ceux des points précédents qui s'appliquent au troisième cas où les relations spatiales sont l'effet indirect d'actions (nous reviendrons sur ce dernier cas dans la partie qui concerne les relations temporelles).

Pour toutes les considérations que nous développerons ci-dessous il nous paraît essentiel de noter que le matériel expérimental qui intervient dans nos expériences est un matériel particulièrement simple : nous avons choisi un matériel le plus pauvre possible en relation avec le monde des évènements concrets pour nos sujets. Les attributs de ces matériels sont des formes ou des lignes géométriques et des couleurs, en excluant au maximum toutes les propriétés "fonctionnelles" qui pourraient lier les objets du matériel à une situation concrète trop riche en propriétés.

Ce choix effectué sur le matériel nous permet de poser un certain nombre d'hypothèses quant à l'interprétation des proximités spatiales observées entre les objets du matériel.

C - Hypothèses relatives au cas 1 où les relations spatiales sont déterminées par une activité propre du sujet.

Nous faisons d'abord l'hypothèse que les sujets que nous placerons dans les diverses situations expérimentales d'étude du produit ont dépassé le niveau opératoire No que nous précisons: No est le niveau où les sujets, confrontés à une tâche de classification, construisent des collections figurales (de carrés alignés "pour faire un train" par exemple) ou effectuent des classifications fonctionnelles lorsque le matériel est assez riche et suffisamment peu "abstrait" pour les permettre.

Au-delà de ce niveau opératoire nous faisons l'hypothèse suivante : les relations spatiales (de contiguité ou de proximité en particulier) établies entre les objets du matériel expérimental peuvent s'interpréter par rapport à l'ensemble qui représente ce matériel.

Même sous cette hypothèse nous parlons d'interprétation et non d'une simple traduction, et nous poursuivons ici la distinction entre matériel expérimental et ensemble expérimental (qui représente le matériel), distinction que nous avons introduite au paragraphe précédent. Nous nous appuyons, pour le maintien de cette distinction parfois lourde, sur le point suivant :une même relation (de contiguité par exemple) appliquée à deux exemplaires du matériel expérimental représentés par un même élément (de l'ensemble expérimental) peut ne pas être compatible avec une relation ensembliste unique. Par exemple, deux exemplaires de "carré rouge" peuvent être classés respectivement l'un avec les carrés, l'autre avec les rouges : la partition spatiale déterminée par les proximités à l'intérieur du matériel expérimental ne correspond pas dans ce cas à une partition de l'ensemble étudié. Ce cas peut être flagrant s'il existe plusieurs exemplaires d'un (même) élément mais il peut produire même lorsqu'il y a unicité dans la réalisation (c'est une situation où Piaget parle de classification figurale).

Nous allons donner un autre exemple où il est impossible de transcrire purement et simplement au niveau de l'ensemble expérimental des relations dont la disposition spatiale munit le matériel expérimental. Déduire de la contiguité de A et B, de B et C et de C et A respectivement, que les éléments a, b, c, qui les représentent, vérifient une relation symétrique et transitive, est de fait une hypothèse extrêmement forte même si cette opération semble n'être qu'une transcription fidèle de la relation objective (i.e. entre objets) observée.

Réciproquement une relation d'équivalence que le sujet peut envisager sur l'ensemble expérimental ne se marquera pas nécessairement par une proximité analogue des exemplaires dans le matériel expérimental :

- soit à cause de contraintes topologiques propres au plan par exemple,

- soit parce que le sujet peut fort bien maîtriser une telle relation d'équivalence sans éprouver et manifester la nécessité de la réaliser spatialement.

Il apparaît donc nécessaire de préciser un certain nombre de conditions que doit vérifier le passage des relations spatiales à des relations ensemblistes par une <u>interprétation</u> des premières.

Certaines de ces conditions sont sous forme négative comme "l'interprétation n'est pas une simple transcription", condition que nous allons développer ci-dessous. D'autres conditions posent la nécessité d'hypothèses fonction à la fois de la nature du matériel et de la situation expérimentale précise dans laquelle se fait l'interprétation.

Nous verrons que l'énoncé précis de ces conditions implique un ensemble d'hypothèses dans lequel on puisse les poser de manière complètement explicite.

La notion d'interprétation entre données spatiales et relations ensemblistes comporte :

1/ l'absence de l'implication qui suit : les seules relations ensemblistes pour le sujet sont celles qui se traduisent par des relations spatiales (avec le corollaire de cette implication "pas de proximité spatiale - pas de relation de ressemblance" par exemple).

2/ le passage des relations de proximité à des relations ensemblistes exige des hypothèses précises effectuées en s'appuyant sur l'analyse de la situation expérimentale considérée.

Nous allons développer cette seconde condition à partir de deux exemples particuliers :

Premier exemple :

Considérons un matériel expérimental ne comportant qu'un exemplaire réalisant chaque élément d'un ensemble A x B où A et B ont chacun peu de valeurs (2 et 3). Alors toute disposition spatiale suivant un tableau V x H (verticale x horizontale) présentera de nombreuses relations de proximités horizontale et/ou verticale compatibles avec l'équivalence des éléments pour l'une ou l'autre des dimensions A et B. Dans le cas limite où /A/ = /B/ = 2 tout rangement qu'effectue le sujet dans un tableau 2 x 2 fait apparaître une partition horizontale ou verticale compatible avec une partition de l'ensemble A x B selon une des dimensions.

Deuxième exemple :

Dans le carré cartésien E x E plusieurs relations qui existent sur E x E peuvent se traduire au niveau du matériel expérimental par une disposition spatiale particulière. Il en est ainsi en particulier de l'égalité de la première projection, de l'égalité de la deuxième projection, de la relation d'appartenance à la diagonale de E. Chacune de ces trois relations peut être individuellement représentée par un alignement vertical ou horizontal des éléments qui vérifient la relation. Il est possible de réaliser les 2 premières relations, spatialement, dans une disposition en matrice carré. Mais il est impossible de réaliser simultanément les trois relations par ce type d'alignement vertical ou horizontal.

Nous voyons sur ces deux exemples apparaître les cas extrêmes :

1/ Même si le sujet ne prend en considération aucune relation sur A x B les contraintes de la situation expérimentale impliquent une partition spatiale réalisant une relation d'équivalence sur A x B.

2/ Même si le sujet prend en considération les trois relations sur E x E les contraintes topographiques entraînent l'impossibilité de leur réalisation spatiale donc dans les deux cas il est impossible d'interpréter en 1/ que le sujet tient compte d'une relation, en 2/ que le sujet ne tient pas compte de l'ensemble des 3 relations.

L'interprétation ensembliste de relations spatiales, effectives où théoriques (1) n'a de sens que si ces relations spatiales ne sont ni nécessaires (cas 1) ni impossibles (cas 2).

On ne peut interpréter que des relations qui :

1/ peuvent être fortuites (ni nécessaires, ni impossibles),
2/ sont rares sinon exceptionnelles lorsqu'elles se produisent.

La seconde condition que nous venons d'énoncer se réfère à une probabilisation implicite des relations spatiales "possibles" pour le matériel expérimental considéré sous les contraintes d'une situation expérimentale donnée.

Il est nécessaire de préciser davantage les propriétés de cette probabilisation des relations spatiales si on veut rendre cette probabilisation opératoire, c'est-à-dire si on veut connaître de manière précise l'inférence contenue dans l'interprétation.

Préciser la probabilisation nécessite :

a) de définir, à partir de certaines hypothèses dépendant du matériel, des conditions expérimentales et éventuellement des sujets, quel est l'ensemble des relations "possibles",

b) de quantifier les probabilités de certaines relations ou ensembles de relations observées, ou, au moins de pouvoir s'assurer qu'on peut négliger leur probabilité, par rapport à un seuil choisi. Cette probabilisation, même seulement partiellement exhibée, est elle aussi fonction d'hypothèses a priori, dépendant du matériel, de la situation du sujet.

Dans les cas les plus favorables d'interprétation, lorsqu'il est difficile d'expliciter, quantitativement, l'espace des relations probabilisées, il est possible de pouvoir quand même préciser qu'un certain type de relation spatiale est négligeable parmi l'ensemble des relations envisageables sous toute une classe d'hypothèses. Cette dernière situation contient par exemple le cas des interprétations des classifications pratiques en termes de partitions d'ensemble.

Les hypothèses qui permettent une probabilisation dépendent de la situation dans laquelle se pose un problème d'interprétation. Nous n'irons donc pas au-delà des remarques précédentes dans l'étude générale de cette question. Nous signalerons toutefois deux points :

1/ L'étude dite "clinique" des réponses du sujet apporte une information supplémentaire sur le lien entre relations spatiales et relations ensemblistes. En particulier la référence aux verbalisations et aux justifications éventuellement obtenues des sujets peut permettre de restreindre le champ des hypothèses qu'il est "raisonnable" de faire (quant aux relations "possibles") en fonction de l'analyse théorique de la situation.

2/ Les propriétés de la réalisation de l'ensemble expérimental en un matériel expérimental ont des conséquences quant à l'incertitude de l'interprétation. En particulier l'existence de plusieurs exemplaires d'un même élément introduit des contraintes sur les relations spatiales "possibles" compatibles avec une relation ensembliste donnée et réduit donc leur probabilité.

Nous n'avons donc pas résolu le problème de la liaison entre relations spatiales et relations ensemblistes (définies par le sujet) mais nous avons défini un certain nombre d'hypothèses nécessaires et explicité un ensemble de problèmes à résoudre dans les différentes situations expérimentales où est posée la question de l'interprétation des relations spatiales.

D - Analyse des contraintes spatiales qui sont une donnée de la situation

Le problème de la liaison (pour le sujet) entre proximités spatiales et relations ensemblistes se pose différemment lorsque les relations de proximité sont une donnée de la situation expérimentale.

Une simplification du problème consiste dans le choix préalable qu'a fait l'expérimentateur concernant les dispositions spatiales. À partir d'un matériel expérimental, dont nous avons précisé qu'il était simple, l'expérimentateur définit des dispositions spatiales en fonction d'hypothèses simples. Ces hypothèse concernent en particulier la représentation de relations de ressemblance (équivalences en particulier) et de différences entre éléments par des propriétés d'alignement des réalisations de ces éléments selon une verticale ou une horizontale, c'est-à-dire que non seulement les relations spatiales sont analysées par rapport au cadre privilégié "vertical x horizontal" mais de plus elles peuvent effectivement s'y inscrire selon des règles choisies par l'expérimentateur.

D'autre part la cohérence globale entre les dispositions spatiales données et les relations ensemblistes est assurée dans la construction de l'expérimentateur. Alors que rien ne permet d'assurer qu'il en soit ainsi lors des constructions par le sujet de dispositions spatiales liées à des relations ensembliste que l'on postule, au contraire lorsque les relations de proximité sont déterminées par l'expérimentateur celui-ci peut situe exactement les problèmes possibles de cohérence, posés par les contraintes topographiques propres au plan en particulier (1), et choisir les dispositions spatiales en conséquence.

De plus, les hypothèses initiales de liaison entre relations spatiales et relations ensemblistes ne servent pas seulement à déterminer la présentation spatiale du matériel ; ce sont ces mêmes hypothèses qui vont être utilisées pour l'étude des réponses du sujet à la situation expérimentale ; ces hypothèses font donc partie des données initiales du modèle par rapport auxquelles l'expérimentateur analyse l'ensemble de l'expérience. En particulier ces hypothèses constituent une partie de la définition de la situation.

Les hypothèses secondaires qui vont être faites sur la liaison "spatial-ensembliste" porteront sur les hypothèses partielles (éventuellement vides) que le sujet utilisera dans l'ensemble des hypothèses initiales que nous pourrions qualifier de "consécutives" de la situation.

Il apparaît donc une différence essentielle entre les cas où les proximités spatiales sont produites par les actions du sujet et le cas où elles sont définies par l'expérimentateur : cette différence concerne le statut des hypothèses faites sur la liaison qui existe entre relations spatiales (dans le matériel expérimental) et relations ensemblistes (dans l'ensemble expérimental).

Dans le premier cas il s'agit d'hypothèses concernant le modèle du sujet que l'on cherche à confirmer ou à infirmer (en fonction d'hypothèses initiales préalables) ; dans le second cas il s'agit d'une donnée dans l'analyse (c'est-à-dire en fait la définition théorique) de la situation expérimentale (et/ou dans sa construction effective).

Bien entendu il y a une dépendance étroite entre les deux cas : la validation ou l'infirmation des hypothèses indiquées plus haut, dépendent d'hypothèses théoriques (et/ou techniques) préalables : ces hypothèses préalables contiennent ici en particulier les hypothèses initiales posées lors de la détermination des dispositions spatiales. Réciproquement ces hypothèses initiales ne sont pas des a priori, détachées de toute expérience, et sont, en partie au moins, conditionnées par les propriétés des hypothèses que l'on veut essayer de confirmer ou d'infirmer.

---

(1) Par exemple, il est impossible de disposer 4 éléments dans le plan de sorte que la distance de deux quelconques d'entre eux soit la même.

E - Lorsque des relations spatiales sont un effet indirect d'actions du dujet elles peuvent :

- soit traduire simplement le déroulement d'une succession temporelle, l'affecter ou ne pas l'affecter en retour,

- soit intervenir pour le sujet à un titre de situation expérimentale à un instant donné, ce qui nous ramène au cas précédent pour l'analyse. Lorsqu'il y a, par un effet de retour; réorganisation spatiale nous retrouvons le premier cas.

Il nous paraît difficile d'aller plus loin dans l'étude de ce cas (qui peut être fréquent dans une expérience), aussi bien d'ailleurs dans l'analyse générale que dans les études particulières aux expériences effectuées : l'interférence avec les processus temporels introduit un problème particulier, et nous manquons de moyens théoriques pour le résoudre, même sur des cas particuliers. Nous verrons, dans le paragraphe suivant, que les problèmes de liaison entre succession temporelle et relations ensemblistes sont eux-mêmes d'une difficulté accrue par rapport aux problèmes "spatiaux", imposée à la fois par la contrainte du déroulement unidimensionnel et orienté du temps et par la possibilité contradictoire d'anticipation ou de délai, non accessibles à l'observation de la part du sujet.

3.2. RELATIONS TEMPORELLES ET RELATIONS ENSEMBLISTES DANS LE MODELE DU SUJET

Les relations temporelles que l'on peut envisager sont a priori la simultanéité et la succession ; à l'intérieur de ce dernier cas on peut distinguer la succession directe, d'ordre 1, et les successions concernant une séquence d'évènements.

Comme précédemment pour les relations spatiales, on peut distinguer deux situations :
- les simultanéités ou les successions sont la conséquence des actions du sujet ;
- les relations temporelles sont une des données de la situation-problème.

Dans les situations que nous avons utilisées dans notre champ expérimental, seules interviennent les relations de succession, la construction des expériences éliminant à la fois une présentation simultanée d'éléments nouveaux dans le déroulement temporel de la situation et la production simultanée par le sujet d'éléments dissociés.
Il nous faut remarquer que, de fait, les relations de simultanéité se confondent avec les relations spatiales de donnée des éléments, et que les relations temporelles de succession peuvent aussi être représentées par alignements avec des proximités spatiales qui sont la simple conséquence d'une succession temporelle.

1. Successions déterminées par les actions propres du sujet

Tout ce que nous avons dit plus haut à propos des relations spatiales reste valide dans le cas des relations temporelles de succession en ce qui concerne les problèmes de mise en rapport de ces relations avec des règles d'action et des représentations du sujet.
La situation est même plus complexe : les relations temporelles de succession apparaissent unidimensionnelles, donc la représentation par une succession d'éléments de relations ensemblistes entre des éléments complexes est difficile.

Dans certains cas il n'est pas possible d'intégrer sous formes de relations temporelles des relations ensemblistes complexes : ainsi dans la construction du carré cartésien A x A, si on peut représenter les coordonnées par une succession de n séquences de longueur n appropriées, on ne peut simultanément représenter la "diagonale" dans la même organisation temporelle.
Une différence tient par ailleurs aux problèmes de mémorisation : l'organisation temporelle qui prend en compte des relations ensemblistes complexes fait intervenir de manière importante des questions de mémorisation à court ou long terme (sauf si cette organisation

est immédiatement transcrite en relations spatiales, ce qui nous ramène à l'analyse précédente). C'est déjà le cas de la représentation d'une relation d'équivalence, dès lors qu'il faut assurer l'exhaustivité de cette représentation.

Une des conséquences est le fait suivant : pour que des relations temporelles soient utilisées de façon opératoire pour représenter des relations ensemblistes il doit y avoir pour le sujet nécessité à y recourir. C'est le cas en particulier pour des situations où les éléments à produire ou à explorer ne sont pas simultanément directement accessibles (s'ils ne peuvent être vus que un par un par exemple). La procédure de balayage temporel n'est alors efficace que si elle est étroitement liée à la structure de l'ensemble des éléments à produire ou à explorer de façon à assurer un parcours des éléments complet mais sans redondance. Dans un tel cas la probabilité a priori d'une succession ayant ces caractéristiques est en général très faible et la procédure choisie par le sujet très informative. Néanmoins nous n'avons pas dans nos expériences, utilisé de telles situations étant donnée la difficulté à organiser et contrôler de telles procédures dès que les cardinaux des ensembles dépassent 3 car cela nécessite de garder en mémoire le parcours de chacun des ensembles de base..

En conclusion, l'ensemble des contraintes qui règlent les rapports entre relations ensemblistes et relations temporelles est tel qu'il semble difficile d'analyser des procédures temporelles sans les rattacher simultanément aux relations spatiales qui les accompagnent ou qui les suivent dans les actions des sujets.

2. La succession temporelle est déterminée par les données de la situation expérimentale

On retrouve entre ce cas et le précédent des différences de même nature que celles existant pour les relations spatiales.
Lorsque des éléments sont donnés de façon successive par l'expérimentateur il peut prendre en compte l'une ou l'autre des deux relations ensemblistes inverses : la différence ou la ressemblance constante entre deux éléments successifs au cours d'une séquence.
On peut ici tenir compte des hypothèses de mémorisation de la part du sujet pour choisir la longueur des séquences significatives.
Ainsi, supposons que l'épreuve consiste à faire établir une correspondance entre un produit C x F et un ensemble C' définie par une bijection entre C et C'. Une succession telle que
$(c1, f1) \leftrightarrow c'2$
$(c1, f2) \leftrightarrow c'2$
$(c2, f2) \leftrightarrow c'1$
permet d'éliminer par le premier 2-uplet de la séquence l'hypothèse que la correspondance dépend de la forme, le second confirme ce point, et - dans le cas où C et C' ont 3 éléments donne une information complète si on sait que la correspondance dépend soit de la forme soit de la couleur ; une telle séquence nécessite une faible mémorisation.

Nous voyons néanmoins que les relations sont productives à condition que le sujet ait déjà fait un certain nombre d'hypothèses pertinentes sur les propriétés de la correspondance (qu'elle est fonction soit de la seule couleur soit de la seule forme par exemple..); dès qu'il s'agit d'une situation plus complexe (correspondance produit par exemple) la gestion des hypothèses permises par cet ordre de relations temporelles devient beaucoup plus difficile ; on arrive à des situations dites de construction de concept pour lesquelles on dissocie mal sur le plan du modèle les réponses liées à des représentations de la part du sujet de celles qui tiennent à des effets de répétition peu ou pas conscients.

3. L'analyse des relations temporelles dans leurs rapports avec les relations spatiales est donc plus difficile que celle des relations spatiales ; encore n'avons-nous pas posé le problème des successions d'ordre supérieur à 1.. Elle nécessite des hypothèses - ou des connaissances préalables - plus fortes que dans le cas des relations spatiales : en fait nous l'utiliserons conjointement avec l'interprétation des relations spatiales qui lui sont liées qu'il s'agisse de l'analyse des procédures que des effets temporels dans les réponses relatives à la bijection entre produits ensemblistes (expériences des "dominos").

4. INDEX DE QUELQUES TERMES...

Champ conceptuel

C'est une notion-clé dans l'analyse théorique du développement cognitif, introduite par G. Vergnaud (voir en particulier Vergnaud, 1983). Introduction p. XXI sq.

Concept

Représentation symbolique (presque toujours verbale) utilisée dans le jeu de la pensée abstraite, et ayant une signification générale valable pour un ensemble de représentations concrètes dans ce qu'elles ont de commun (concept d'arbre, par exemple, commun à toutes les sortes d'arbres).

Dans la plupart des recherches expérimentales, désigne une classe d'objets déterminée soit par l'existence de propriétés qualitatives communes (forme, couleur, taille, etc.), soit par des propriétés fonctionnelles ou des relations. V. Classe, relation d'équivalence, H.P. (1).

Conceptions, représentations

Ces termes renvoient au sujet : on parlera ainsi des conceptions des enfants sur la continuité, de leurs représentations de l'ensemble des nombres. Le terme de "conceptions" est plus vague, et ne se réfère pas à un ensemble conceptuel plus large sur l'étude de la connaissance. Le terme de "représentations" s'intègre de façon plus précise dans un cadre théorique, où sont mises en relation les notions de "champ conceptuel", "systèmes de représentations", "signifié/signifiant/référent", "règles d'action", "théorèmes en acte", "invariants opératoires" (Vergnaud) ou d'autres ensembles denotions entrant dans des cadres théoriques sensiblement différents. On peut ainsi citer le résumé d'une intervention aux journées d'étude de la société française de psychologie sur le thème des représentations :
"1/ acceptions du terme de "représentation" : le représentation comme processus et comme produit de processus ; la nature du produit de ces processus (objet matériel ou produit cognitif) ; la représentation mentale (disponibilité et actualisation des entités cognitives).
2/ propriétés des systèmes de représentation : codage de l'information ; abstraction ; conservation des relations,processus directionnels ; référence spécifique à la notion de figuration.
3/ fonctions des systèmes de représentations : conservation de l'information ; modalités d'utilisation de l'information ; préparation à l'action ; notions de schématisation et de systé-

---

(1) Les initiales H.P. font référence à H. Piéron. Vocabulaire de Psychologie, Paris, P.U.F., 1973, 5ème édition, revue et corrigée.

matisation" (Denis).

Cf. Introduction, p. XXIV sq.

Conduites, comportements

Comme les termes de représentation et de conception, les mots conduites et comportements, à côté d'une acception non spécifique qui renvoie à la manière dont un sujet agit, verbalise, transforme une situation, peuvent s'intégrer dans des cadres théoriques différents. De manière générale le terme de comportement a une connotation plus restrictive que conduite. Dans le cadre du behaviorisme le comportement s'identifie aux éléments physiquement observables, à l'exclusion de toute intervention d'une interprétation qui ferait intervenir des concepts dits "hypothétiques" : il devient alors évidemment fort difficile de faire entrer dans le "comportement" la part de signification que comporte le langage (par exemple). Les références à la science comportementale en parlant de la psychologie (dont la psychologie cognitive) sont, dans la pratique, exclusives de l'intégration dans la théorie de notions comme celles de systèmes de représentation..

Contrat didactique

Le contrat didactique est, schématiquement, l'ensemble des "règles de jeu" implicites qui régissent la réponse de l'élève aux demandes du maître (Brousseau, 1979 ; Chevallard, 1983). Un exemole, emprunté à un tout autre domaine que la didactique des mathématiques, peut illustrer cette notion : un exercice de grammaire de 4ème comporte un court extrait d'un dialogue entre Louis XIII et un officier ; deux questions le suivent : l'une sur la valeur temporelle du temps utilisé, l'autre demande de rédiger un petit texte analogue entre un ministre et son chauffeur par exemple. Analyse de la deuxième question par un adulte n'ayant sous les yeux que la page de l'exercice, et n'ayant pas regardé la nature du manuel : "l'officier cherche à soutirer au roi des informations, en lui demandant innocemment l'emploi du temps que lui prévoit le roi, tu dois écrire un texte où le chauffeur tente la même chose ; surprise de l'élève: l'objectif du manuel, confirmé par la correction qui suivra en classe, est l'usage du futur à valeur d'ordre.

Les concepts de contrat didactique, transposition didactique.. relèvent de la théorie des situations didactiques développée par G. Brousseau et par Y. Chevallard.

Dimension / dimensionnel / dimensionalité

La place de ces termes est développée dans une annexe qui présente un bref aperçu historique de leur introduction en psychologie et en physique, à partir du sens géométrique originel.

Dimensionalité et ses dérivés, est un néologisme dont la signification se rapproche de celle de dimension (au singulier) en mathématique mais dont le champ d'utilisation a été élargi.

Indice

L'indice révélateur d'un objet ou d'une situation (...) est fourni par une perception naturellement liée à l'expérience de cet objet ou de cette situation. H.P.

Invariant opératoire / invariant représentatif

Voir introduction, page XI ; Piaget "introduction à l'épistémologie génétique."

Macro-espace / micro-espace

Le macro-espace se définit par opposition au micro-espace des objets que l'on peut atteindre par déplacement de la main, sans déplacement du corps propre ; il se différencie également de l'espace des déplacements "immédiatement effectuables", celui des coordinations motrices ; le terme anglo-saxon correspondant est "large-scale" space. Un élément de différenciation importante est la possibilité d'une prise d'information complète de l'espace considéré sans déplacement. Cette différenciation n'est pas mise en oeuvre par tous les auteurs. L'usage des cartes ou des plans concerne le macro-espace.

Modalité sensorielle

Helmhotz a appelé ainsi des catégories de qualités sensorielles séparées des autres catégories par un hiatus excluant les transitions (modalité visuelle, auditive..), H.P.

Obsolescence, obsolescent

Ces termes sont des néologismes, remettant en usage le terme français "obsolète", qui signifie justement "qui n'est plus en usage, désuet". Chevallard appelle obsolescence d'un objet d'enseignement un phénomène de vieillissement, qui fait qu'une notion n'est plus "présentable" comme un objet d'enseignement - en particulier parce qu'elle a déjà servi comme tel pour les élèves concernés. Ce terme a également une connotation historique.

Plan fronto-parallèle

Le terme fronto-parallèle s'entend par rapport au sujet : un plan fronto-parallèle est parallèle au plan du corps.

Proximal - distal

L'axe proximal-distal est un repère relatif au corps propre, perpendiculaire au plan du corps et dans le plan de symétrie de celui-ci ; sur cet axe "proximal" caractérise ce qui est près du corps et "distal" ce qui est éloigné.

Niche informationnelle

Ce terme introduit par Brousseau fait référence au fonctionnement dans un domaine numérique spécifique (petits nombres opposés à grands nombres, pour simplifier) des diverses opérations arithmétiques.

Quantité intensive, quantité extensive

Ces deux adjectifs s'opposent chez Piaget, dans le sens suivant: la quantité "extensive" est caractérisée par la comparaison des parties entre elles sans spécification de l'unité, la quantité "intensive" est caractérisée par des rapports de partie à tout et se prolonge en une quantification "numérique" ou "métrique". (Piaget. Le développement des quantités physiques chez l'enfant, 1941, avant-propos).

Qualité sensorielle

On désigne toute impression qui se différencie nettement des autres, indépendamment de l'intensité, et possède une individualité qualitative : une saveur amère, une couleur rouge (...). Quand on passe par transition insensible d'une qualité à une autre, du rouge au bleu par exemple, les qualités se rangent dans une catégorie homogène, comme celle de la couleur. V. modalité. H.P.

Référentiel

La notion de référentiel se rapporte à la signification d'un matériel pour un sujet. Plutôt qu'au contenu, il se rattache au domaine de référence (Voir Partie I, chapitre I, p. 43, note).

Situations - problèmes / situations didactiques

Ces termes, utilisés en psychologie cognitive et en didactique, renvoient à des situations différant pour l'essentiel par leur(s) objectif(s). Cf. introduction, p. XXIX sq.

Variable

Toute grandeur physique appartenant à un ensemble de grandeurs indépendantes employées pour spécifier le stimulus, ou toute qualité sensorielle élémentaire (considérée comme non décomposable) H.P. Voir indice, modalité, dimension.

• Variable didactique

La notion de variable didactique intervient lors de l'étude des situations didactiques : il s'agit d'un élément de la situation sur lequel l'enseignant peut jouer et qui va modifier les rapports des élèves avec les notions en jeu dans la situation didactique. Par exemple le temps laissé aux élèves pour résoudre un problème peut être une variable didactique, si le fait de le restreindre rend inefficace la mise en oeuvre de procédures relevant d'une conception que l'enseignant veut justement modifier. Le changement de "niche informationnelle" (Brousseau) dans le domaine numérique est également une modification de la variable didactique que constitue - pour certaines situations - l'ordre de grandeur numérique. Le sexe des élèves ou leur origine socio-professionnelle n'est en revanche pas une variable didactique.

DEUXIEME PARTIE

PARTIE II

1. Classification des tâches sur le produit cartésien ; description des expériences ; méthode de présentation et d'analyse des résultats 3

   Organigramme des tâches sur le produit 6

   Répartitions des sujets dans les différentes expériences 7

2. Comparaison du produit hétérogène et du produit homogène (C x F, C x C) 17

3. Caractères d'exhaustivité et d'unicité dans les constructions du point C x F 22

   Annexe : Analyse des deux protocoles 30

4. Dénombrements, adjonctions, rangements 39

5. Rapports interdimensionnels 53

6. Relation entre négation et unicité 60

   Produit cartésien et complément 63

7. Construction de produits homogènes (C x C ; F x F) 86

8. Mise en correspondance de dessins (F' x C') et de plots (F x C) 113

9. Mise en correspondance de plots (F' x C') et de timbres (F x C) 129

10. Mise en correspondance d'étiquettes (F x C) et de dominos Ag x Ad 154

11. Mise en relation de boîtes (Cg x Cd) et de dominos (Ag x Ad) 198

12. Conclusion

1 - CLASSIFICATION DES TACHES SUR LE PRODUIT CARTESIEN
DESCRIPTION DES EXPERIENCES
METHODE DE PRESENTATION ET D'ANALYSE DES RESULTATS

Nous avons vu dans le chapitre sur les objectifs et la méthodologie que pour étudier les appropriations par les enfants des notions s'organisant dans le champ conceptuel complexe du "produit cartésien",* nous avions choisi d'étudier un "complexe" expérimental destiné à apporter des informations de divers points de vue.

Les tâches présentées aux sujets dans nos différentes expériences peuvent être classifiées en trois grandes catégories :

1° : Produire une collection de nouveaux éléments en combinant, de façon "multiplicative", les éléments de deux ensembles de base A et B ; (produire des objets de la catégorie) (1) ;

2° : Effectuer des opérations sur un ensemble produit, ou sur une partie d'un ensemble produit A x B définies à partir des projections de A x B sur les 2 ensembles de base (opérer sur les objets de la catégorie) ;

3° : Mettre en relation un ensemble A x B avec un ensemble A' x B' à partir de deux correspondances indépendantes $A \rightarrow A'$ et $B \rightarrow B'$ (produire des "morphismes" de la catégorie).

Cette classification des tâches diffère sensiblement de celle utilisée par Anh Nguyen Xuan (1983) : la classification de cet auteur est en effet

---

(1) Ces tâches comportent soit des constructions de A x B à partir de A et de B, soit des adjonctions d'un élément à A (ou à B) pour lesquelles le sujet doit prédire le nombre d'éléments nouveaux dans le produit $(A \cup \{a\}) \times B$, ou construire ces résultats nouveaux. Ces tâches sont désignées sous le terme "adjonctions".

construite à partir de deux "opérations logiques inverses" de multiplication et de division et s'applique à des paradigmes expérimentaux où le produit cartésien s'inscrit spatialement dans un tableau de lignes et de colonnes (1).

La classification que nous proposons est construite en fonction de l'analyse ensembliste du produit, sans préjuger des rapports entre relations ensemblistes et relations spatiales. (Ces rapports sont étudiés pour nous dans les tâches de type "opérations sur le produit").

Les expériences effectuées seront, dans ce qui suit, décrites et étudiées en fonction des tâches qu'elles comportent mais nous les dénommons en fonction des caractères du matériel utilisé, pour pouvoir y faire référence.

Par rapport à la classification formelle des tâches, nous devons ajouter un autre axe à notre étude : celui des rapports entre les représentations des enfants (et les opérations qu'ils effectuent) avec les caractéristiques des "dimensions" en jeu.

En effet les sujets travaillent sur un matériel expérimental, non sur des ensembles. Nous explorons donc les effets produits par la réalisation choisie, pour fournir quelques jalons sur le domaine de validité des opérations cognitives engagées dans ces types de tâches.

En particulier nous comparons les représentations du "produit hétérogène" de deux dimensions différentes (forme et couleur) et du "produit homogène" (de deux ensembles de valeurs d'une même dimension (forme <u>ou</u> couleur) ; nous étudions également les rapports interdimensionnels dans

---

(1) Les tâches présentées dans les tableaux de psychologie cognitive sont essentiellement de ce dernier type (qu'il s'agisse"d'identification de concepts", de "classifications multiples", de "complétion de matrices"..)

l'organisation de produits "hétérogènes" F x C.

Les paragraphes qui suivent correspondent à une organisation qui ne reflète directement ni les objectifs que nous avons présentés, ni la classification des tâches, ni ne reprend une analyse expérience par expérience : en fonction de nos objectifs nous avons focalisé, pour chaque paragraphe, notre étude sur des comparaisons spécifiques entre tâches et/ou entre expériences. Cette organisation complexe, non linéaire, reflète pour l'essentiel la complexité même du champ conceptuel étudié.

L'organigramme qui suit essaie de présenter les rapports entre expériences, tâches et analyses présentées. La description des expériences avec la répartition des sujets est donnée dans le Tableau I.

°

° °

Organigramme des tâches sur le produit cartésien

Tâches de construction	• produit hétérogène F x C . "cartes" (a,b) . "plots" . "mouchoirs"	étude des constructions § 3 comparaison des 2 types de produits sur les mêmes sujets (100 Ss) § 2
	• produit homogène . C x C "maisons" (a > b) "maisons" (c) . F x C "bateaux" (c)	étude des constructions "homogènes" § 7
	• adjonction d'un élément e à E dans construction E x E ("maisons" et "bateaux" - c)	
Opérations sur le produit	• rangements (F x C) . "cartes" - a . "plots"	
	• rangements dans tableau spatial . "mouchoirs"	étude des rangements § 4
	• rangements (E x E) . "maisons" - a	
	• dénombrement d'une "fibre" de F x C . "cartes" - b et "mouchoirs"	étude des tâches numériques § 4
	• prévision numérique sur l'adjonction d'1 élément à F, à C . "cartes" - b . "mouchoirs" . "plots"	
	• complément dans le produit (F x C) . mouchoirs" : rapport entre construction du produit et négation conjonctive ("non (a et b)")	"produit" et négation cognitive § 6
Mises en correspondances entre les produits	• . "plots et dessins" F x C F' x C'	§8
	. "plots et timbres" F x C $\longrightarrow$ F' x C' ; F x C $\longrightarrow$ F' F x C $\longrightarrow$ C'	§9
	. "dominos - marques"	§10
	F x C $\longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2$ F x C $\longrightarrow A_1 \times A_2$. "dominos marques" C1 x C2 $\longrightarrow A_1 \times A_2$	§11

TABLEAU 1 - REPARTITION DES SUJETS DANS LES DIFFERENTES EXPERIENCES
(Les lettres en indice signifient qu'il s'agit des mêmes sujets)

Niveau / Expérience	...	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	TOTAL
"cartes" a		12a	12a	12a	12a	12a*	60_a*
"cartes" b		10_b	10_b	10_b	10_b		40_b
"plots"			4	16_d	16_d	16_c	52_d
mouchoirs"		12 +12	12	12	12		60
maisons - a		12a	12a	12a	12a	12a	60_a*
maisons - b		10_b	10_b	10_b	10_b		40_b
maisons - c	24_c	24_c	24_c				72_c
bateaux - c	24_c	24_c	24_c				72_c
"plots et dessins"				16_d	16_d	16_d	48_d
"plots et timbres"		16		8	16	8	48
"dominos marques"		17	15	15	14	15	76
"dominos couleurs"		18	18	21			
TOTAL	24	121	95	110	80	51	473

(* dans ces deux expériences, certains enfants sont plus âgés que la "normale" de leur classe).

Etant donnés les objectifs spécifiques des différentes expériences et les résultats obtenus au cours du déroulement des expériences (et le nombre des enfants individuellement interrogés, et des protocoles dépouillés) ce tableau ne doit pas être considéré comme représentant un "plan d'expérience" mais comme un bilan.

- "Cartes"

Réalisation d'un produit F x C, avec F = {carré, cercle, croissant} et C = {jaune, rouge, bleu, vert} . Chacune des formes de F est dessinée sur une carte blanche. On donne au sujet 3 tas de telles cartes et on lui donne d'autre part, quatre "feutres" de couleur.

. Consigne de la tâche de construction (type 1)
"Tu vas faire toutes les cartes coloriées que tu pourras, sans en faire en double". On répète éventuellement "ne pas avoir 2 fois la même", "pas deux pareilles".

On donne un exemple de carte coloriée avec une autre forme et une autre couleur.

. Consigne de la tâche de prévision numérique sur l'adjonction (type 2)
"Combien peut-on faire de nouvelles cartes différentes si j'ajoute du marron ?"

Pour 60 sujets cette épreuve a été passée avant celle de construction d'un produit C x C ("cartes" - a) ; pour 40 sujets, elle a été passée après ("cartes" - b).

- "Plots"

Réalisation d'un produit F x C, avec F = {rectangle, carré, triangle} et C = {jaune, rouge, bleu, blanc} . On donne au sujet :
- un tas de plaquettes de bois naturel, des trois formes de F (approximativement de même surface),
- un tas de supports en plastique de 4 couleurs de C.

Les plaquettes peuvent s'insérer sur les supports pour former ce que l'on appellera un plot  (Tr).

. Consigne de la tâche de construction (type 1)
"Avec les plaquettes et les supports on va faire des plots" - on montre un exemple avec une couleur non donnée au sujet. "Tu vas faire tous les plots que tu peux sans faire deux fois le même". On montre un plot identique à celui déjà construit et on le défait en justifiant : "il est déjà fait une fois, il ne faut pas le refaire".

. Consigne de "justification" (type 2)
Après la construction, on demande au sujet "pourquoi il est sûr de tout avoir construit"

. Consigne de prévision numérique sur l'adjonction (type 2)
"Combien de nouveaux plots peut-on faire avec une nouvelle couleur ?"
"Combien de nouveaux plots peut-on faire avec une nouvelle forme ?"

. Consigne d'identification de 2 réalisations de F x C (type 2)
On donne au sujet un tableau (lignes x colonnes) de dessins de mêmes formes et de mêmes couleurs que les plots construits. Ces dessins sont disposés de sorte à ne former aucun rangement suivant l'une ou l'autre des dimensions. La consigne est "range les plots avec ces dessins de couleur pour que ça aille bien". (On ne donne aucune indication supplémentaire).

- "Mouchoirs"

Réalisation d'un produit F x C avec F = (étoile, carré, rond) et C = (jaune, rouge, bleu, vert).

Chacune des formes de F = (étoiles, carrés, ronds) est représentée par une décalcomanie sur un plastique incolore.

Chacune des couleurs (bleu, jaune, rouge, vert) est donnée sous forme d'un carré de carton de couleur.

Les plastiques sont rangés dans les 3 casiers d'une boîte.

Les carrés de couleurs : dans les 4 casiers d'une boîte.

On construit un mouchoir en plaçant un carré de couleur dans un plastique comportant une forme de F.

. Consigne de construction (type 1)

On donne au sujet un exemple de mouchoir avec 1 couleur et 1 forme non utilisée. Ensuite, on lui demande de construire avec les plastiques et les couleurs qu'il a "tous les mouchoirs qu'il peut faire sans faire deux fois le même". On montre un exemple de double en construisant un 2ème mouchoir.

On incite le sujet à continuer lors d'un arrêt sans exhaustivité du résultat.

. Consigne de dénombrement et de prévision (type 2)

Quand le sujet a construit tous les mouchoirs, on fait éliminer les doubles éventuels et on pose les questions numériques suivantes :

1. "Si tu avais de l'orange en plus, combien pourrais-tu faire de nouveaux mouchoirs".

2. "Dis-moi, sans regarder (on cache les mouchoirs) combien tu as de mouchoirs bleus (on choisit une couleur correctement utilisée). Compte...

3. Même question et même vérification pour une 2ème couleur.

4. Reprise de la 1ère question.

Q_f = quatre questions numériques analogues pour la forme. Pour les sujets plus âgés, on demande ensuite "combien as-tu de mouchoirs, en tout ?".

. Consigne de rangement spatial en"matrice" 3 x 4) (type 2)

On présente au sujet un tableau de 12 cases (3 colonnes x 4 lignes) et on lui demande de "bien ranger les mouchoirs" (un par case).

. Consigne de négation conjonctive

"Je ne veux pas de mouchoir rouge avec des carrés, fais-moi tous les mouchoirs que je veux".

- "Maisons"

Réalisation d'un produit C x C avec C = (bleu, rouge, vert).

On donne au sujet des cartes sur lesquelles sont dessinées des maisons formées d'un toit T et d'un fond F (une maison par carte). On lui donne par ailleurs des crayons feutre de couleur.

. Consigne de construction de C x C (type 1)

"Tu vas colorier le toit et le fond des maisons pour faire toutes les maisons possibles, sans avoir deux maisons pareilles".

On donne un exemple de maison bicolore avec des couleurs non données au sujet, et on insiste sur la consigne "ne pas avoir de double", "pas deux fois la même maison", etc.

On précise si nécessaire en cours d'expérience qu'on peut faire le toit et le fond de la même couleur.

On incite le sujet à ranger les maisons "pour voir si toutes sont faite

. Adjonction d'une couleur nouvelle ; construction effective (type 1).

On donne une couleur supplémentaire au sujet (jaune) et on lui demande de"faire toutes les cartes nouvelles qu'il peut faire avec" (en gardant les couleurs antérieures).

Cette expérience a été passée par les mêmes sujets que les "cartes" - soit avant, soit après. Elle a d'autre part été passée par les mêmes sujets que l'expérience qui suit ("bateaux") soit avant, soit après, suivant la modalité suivante.

- "Bateaux"

Réalisation d'un produit F x F avec F (triangle, carré, demi-disque). On donne au sujet deux collections de plaquettes réalisant les formes de F dans l'une les plaquettes sont percées d'un trou, dans l'autre les plaquette sont munies d'un tenon ; l'adaptation de ces dernières ("les voiles") sur les premières (les "coques") constitue un "bateau".

. Consigne de construction (type 1)

Le même que précédemment ; mais au lieu de préciser qu'il ne faut pas faire de double, l'expérimentateur intervient au premier double (éventuellement) construit, pour le faire repérer et faire éliminer le représentant superflu.

. Consigne d'adjonction (type 1)

On demande au sujet de faire les bateaux nouveaux avec une forme nouvelle (pentagone) pour la "coque" et la "voile".

- "Plots et dessins"

Tâche de correspondances "produits" entre une réalisation de F x C et une réalisation de F' x C' ($F \cap F' = \emptyset$, $C \cap C' = \emptyset$).

On donne au sujet un ensemble des plots qu'il a précédemment construit (trois formes et trois couleurs:b, j et w (blanc)). On donne d'autre part un tableau 3 x 3 où sont présentés des dessins de trois formes (étoile E, lune L, croix X) et de trois couleurs (vert v, rouge r et noir n).

Trois tableaux sont utilisés :

. tableau AS, les dessins sont rangés suivant forme et couleur ;
. tableau AP, en carré gréco-latin : trois formes et trois couleurs différentes par ligne et par colonne du tableau ;
. tableau AI, il n'y a ni rangement suivant un critère, ni différence maximum sur les lignes ou les colonnes : AI.

. Consigne de mise en correspondance "spatialisée" (type 3)

Après une description des dessins par le sujet, de sorte que soient utilisés les deux dimensions forme et couleur, une première correspondance es commentée sur le tableau AS.

"Je vais mettre quelques plots (4) avec les dessins, tu dois mettre les autres pour que ça aille bien avec ce que j'ai mis".

On place les plots de sorte que les plots de même forme soient avec des dessins de même forme, de même pour les couleurs. On donne des indications après le premier essai du sujet pour que cette contrainte soit respectée, sans toutefois la donner explicitement. (Exemple : les bleus ici, vont avec les verts).

• Conservation de la correspondance par changement de disposition (type 2-3).

On fait ensuite transporter les plots de cette carte sur AI ou AP "en mettant les plots avec les mêmes dessins". (Cette tâche permet de confirmer la description préliminaire).

. Consigne de mise en correspondance (type 3).

On donne ensuite la même consigne de mise en relation "qui aille bien avec ce qui est déjà mis" entre les plots et les dessins présentés sur l'un des tableaux AP ou AI.

A chaque essai du sujet (à la fin d'une telle correspondance) on demande "comment les as-tu mis ?" ; on présente éventuellement une contre-suggesti

Dans le dernier temps de l'expérience on décrit au sujet la correspondance entre les plots et les dessins (sans préciser explicitement que la forme va avec la forme et la couleur avec la couleur) en disant par exemple : "le vert va avec le jaune", "le carré avec la croix", c'est-à-dire en décrivant la correspondance particulière effectuée. On donne ensuite une dernière correspondance à compléter. (Les sujets sont ceux qui ont construit les "plots").

- "Timbres et plots"

Réalisation de correspondances produites entre F x C et F' x C' où F x C est réalisé par des "plots" (les formes : ronds, carrés, triangles, rectangles ; 4 couleurs), construits par l'expérimentateur, et F' x C' par des "timbres" : lignes non significatives (4 sortes, de complexité voisine (1)) et tracées avec des couleurs peu vives (4 couleurs : marron, violet, turquoise, orange) présentées dans 3 sortes de disposition spatiale (AS, AP, AI).

. Conservation d'une correspondance dans un changement de disposition (type 2-3)

On demande au sujet de déplacer les plots d'un des tableaux de timbres (tableau AS) sur un autre tableau en remettant chaque plot "avec le même timbre".

Le but de cette partie est d'obliger le sujet à identifier un timbre à la fois par sa forme et sa couleur.

. Mise en correspondance produit (type 3)

On place un certain nombre de plots en correspondance chacun avec un timbre, de sorte que les formes se correspondent entre elles et les couleur entre elles. On demande au sujet de mettre les plots qui restent avec les timbres "pour que ça aille bien avec les plots déjà mis" en cherchant quel est le "truc".

(1) Matériel construit à partir d'un travail de D. Lépine sur l'identificat de concepts, qui vérifiait l'équivalence de ces lignes (pour des adulte "cultivés").

. Mises en correspondances unidimensionnelles (type 2)

Suivant que le sujet tient compte de la forme ou de la couleur, on donne une correspondance partielle entre les mêmes timbres et les seules couleurs des plots (ou les formes) et on lui demande, de même, de compléter.

. On demande ensuite de compléter une nouvelle correspondance entre timbres et plots reconstitués.

- "Dominos et étiquettes"

Réalisation de deux correspondances unidimensionnelles $F \times C \longrightarrow A_g$, et $F \times C \longrightarrow A_d$, et de la correspondance produit $F \times C \longrightarrow A_g \times A_d$ où F est un ensemble de 3 formes (pique, carreau, trèfle), et de 3 couleurs (vert, bleu, noir) et $A_g \times A_d$ deux ensembles d'animaux ($A_g \cap A_d = \emptyset$).

On donne au sujet un ensemble $\mathcal{D}$ de 9 dominos, (définis par $A_g \times A_d$) et un ensemble $\mathcal{B}$ de boîtes blanches sur lesquelles sont collées les réalisations de $F \times C$. Ces boîtes s'ouvrent et contiennent des dominos identiques à ceux de $\mathcal{D}$ (1 par boîte). On donne d'autre part un tableau représentant un rangement en matrice $A_g \times A_d$ des dominos identiques à $\mathcal{D}$ et un tableau représentant un rangement en matrice $F \times C$. On décrit le matériel au sujet. Identification des réalisations de $F \times C$ d'une part, $A_g \times A_d$, d'autre part.

• "Sur chaque boîte il y a un dessin de couleur ; sur ce tableau il y a la même chose. Tu vas mettre d'abord chaque boîte à sa place". Si tout est correct, on approuve et on passe à la suite. Sinon on recommence en corrigeant les 3 premiers placements ; on note la suite.Quelque soit le résultat, on passe à la suite.

• "Sur chaque domino, il y a deux animaux. De ce côté-ci un rat, un castor ou un renard. De ce côté-là un mouton, un cochon ou une chèvre. Sur ce tableau, il y a les mêmes dominos. Tu vas d'abord mettre chaque domino à sa place".

(Même conclusion que pour les boîtes).

. Correspondances unidimensionnelles

A - "Dans chaque boîte, il y a un domino comme ceux-là..."
"En regardant bien les marques, tu dois deviner quel animal il y a de ce côté-ci dans les autres boîtes ; tu me dis si c'est un rat, un renard ou un castor. Quand tu auras dit pour chaque boîte, on le refera et tu pourras regarder si tu as deviné juste ou non".

B - "Tu vas deviner maintenant les animaux qui sont de l'autre côté. Je t'en montre quelques uns..."

"Tu cherches à trouver les animaux qui sont de ce côté dans les autres boîtes fermées ; tu me dis pour chaque boîte si c'est un cochon, une chèvre ou un mouton. Quand tu auras dit pour chaque boîte, on le refera et tu pourras regarder si tu as deviné".

. Correspondance bidimensionnelle

C - "Maintenant tu vas deviner le domino qu'il y a dans chaque boîte. Tu vois les dominos qu'il y a dans celles-là".

"Tu regardes bien les marques et tu me dis pour chaque boîte quel domin il y a dedans en me montrant là-dessus"(tableau).

"Tu vas deviner pour chaque boîte ; après on le refera une autre fois e tu pourras regarder si tu as dit juste".

- "Dominos et couleurs"

Expérience construite avec le même paradigme que la précédente, mais le matériel des "boîtes" est isomorphe à $C_g \times C_d$ où C_g (vert, bleu, orange) est réalisé par une pastille de couleur sur la gauche de la boîte, et C_d (gris, violet, marron) est réalisé par une pastille de couleur à droite.

2 - COMPARAISON DU PRODUIT HETEROGENE ET DU PRODUIT HOMOGENE

Nous avons présenté les deux grandes classes de tâches de construction de produit selon les caractéristiques respectives des ensembles en jeu. Nous avons par ailleurs, lors de la présentation des objectifs, précisé une hypothèse que nous voulions vérifier : la plus grande difficulté de construction du carré cartésien par rapport à un produit A x B, en relation avec une opération sous-jacente d'indexation, nécessaire pour passer d'une représentation liée aux sous-ensembles à deux éléments à une représentation en produit pour E x E.

2.1. Avant d'analyser les propriétés des procédures de construction dans les deux types de produit, nous allons d'abord donner des résultats globaux en terme de réussite ou d'échec pour chacun des deux types de tâches.

Deux expériences nous permettent cette comparaison, celles de construction des "cartes" et de construction des "maisons" - réalisant respectivement C x F et C x C - dans les versions a et b qui diffèrent par l'ordre dans lequel ont été présentées les deux tâches de construction.

Pour la version a), la construction de C x F et les tâches de rangement et d'adjonction (1) ont précédé la construction de C x C ; pour la version b l'ordre des épreuves a été inversé.

Nous avons comparé sujet par sujet la réussite à la construction, c'est-à-dire le fait que l'enfant produise un ensemble complet et sans double. Les tableaux suivants donnent la répartition en pourcentage des couples de réponse pour C x F et C x C, pour les deux ordres de passation : a et b.

---

(1) Prédiction du nombre des nouveaux éléments de $(C \cup \{c\}) \times F$ ou de $C \times (F \cup \{f\})$ avec une couleur, c, ou une forme, f, non utilisée pour C x F.

Tableau I.2

a		cartes		
		+	-	
maisons	+	23	0	23
	-	57	20	77
		80	20	

Tableau II.2

b		cartes		
		+	-	
maisons	+	25	5	30
	-	35	35	70
		60	40	

(les pourcentages ont été calculés sur les réponses des enfants d'âges analogues pour a et b, soit des élèves de CP à CM1 de 6 à 10;6 ans).

L'hypothèse faite s'avère donc vérifiée avec les dimensions forme et couleur pour le produit hétérogène et la couleur pour le carré cartésien : la comparaison, sur d'autres groupes, de la construction des carrés C x C et F x F nous conduira à étendre le domaine de validité de notre hypothèse. Rappelons néanmoins que la réussite à la construction signifie simplement que l'enfant réalise une collection en bijection avec l'ensemble produit cherché mais sans que l'on puisse préjuger de la représentation en terme de structure de ce qui est ainsi construit. L'étude de l'ensemble des opérations effectuées sur les produits, ainsi que les procédures de construction elles-mêmes nous permettront de préciser davantage cette hypothèse globale.

Nous pouvons par ailleurs remarquer que le seul effet d'ordre paraît être d'introduire une difficulté relative un peu plus grande dans la construction de C x F présentée après C x C : comme si celles des procédures mis en oeuvre par les enfants pour construire C x C étaient "disponibles" au début de la seconde épreuve et que celles spécifiques à A x A (construction par paires, utilisation de la symétrie..) faisaient alors obstacle - pour certains sujets - à la mise en oeuvre de procédures valides pour C x F (alors que les procédures valides pour C x F le restent pour C x C, bien que nécessitant de plus une indexation) (1).

2.2. Pour une comparaison plus fine des opérations conduites sur les deux types de produit nous avons comparé les réussites aux opérations suivantes (pour les mêmes sujets) lors des épreuves b :

- construction de C x C, en dissociant la construction exhaustive de la construction correcte (sans double) ;

- la construction des éléments nouveaux obtenus par l'adjonction d'une couleur supplémentaire : nous supposons ici que le problème posé par la consign d'unicité "ne pas faire deux pareils" a été réglé lors de la première partie de l'épreuve) donc nous étudions les réussites complètes (exhaustivité et unicité) ;

- construction de C x F exhaustive et avec un double éventuel (la signification du "pareil" n'étant pas a priori identique pour les matériels C x C et C x F) ;

- construction correcte de C x F.

La répartition des sujets selon leurs réponses est présentée dans le tableau III_2 ci-dessous, pour chacun des niveaux scolaires et pour l'ensemble des 40 sujets.

L'ordre des tâches correspond soit à l'ordre purement logique (il y a davantage de réponses exhaustives que de réponses à la fois exhaustives et

(1) Il s'agit toujours de réaliser matériellement des exemplaires des ensembles sans utilisation de matériel symbolique comme le codage des éléments des ensembles de base du produit ; de plus ces ensembles sont construits à partir de dimensions : la conjonction de ces deux faits nous paraît rendre compte des différences obtenues ici par rapport à une expérience de constitution semblable de G. Vergnaud et R. Cohen portant sur des élèves de CE (8 ans) où les ensembles de base étaient des ensembles d'enfants. Les auteurs ont en effet trouvé à la fois un taux de réussite plus faible et une hiérarchie beaucoup moins nette entre A x B et A x A.

sans doubles..) soit à celui de nos hypothèses de départ. Les signes d'inclusion utilisés entre les colonnes ont le sens suivant : 5$\subset$8 signifie que les 5 sujets qui ont réussi la première tâche font partie des 8 sujets qui ont réussi la tâche suivante - présumée plus facile, ou logiquement plus facile.

Tableau III.2

	C x C (U & E)		C x C (Exh.)		Adj. C x C (U & E)		C x F (U & E)		C x F (Exh.)
CP	0		0		1	$\subset$	4	$\subset$	8
CE1	2	$\subset$	3	$\subset$	4	$\subset$	5	$\subset$	9
CE2	2	$\subset$	5	$\subset$	6	$\subset$	6	$\subset$	8
CM1	4	$\subset$	5	$\subset$	8	$\subset$	9	$\subset$	10
N = 40	8	$\subset$	10	$\subset$	19	$\subset$	24	$\subset$	34

Les exceptions à la hiérarchie que nous représentons sur ce tableau sont les suivantes :

- un sujet de CP et un sujet de CE1 réussissent une construction de C x C mais n'ont pas une construction exhaustive de l'adjonction ;

- deux sujets de CE2 font une construction correcte du carré C x C mais n'arrivent pas à une construction exhaustive pour C x F.

Nous verrons lors de l'analyse des procédures de construction qu'avec le petit nombre d'éléments à construire (9 pour C x C, 7 pour l'adjonction et 12 pour C x F) les inversions observées ne mettent pas en cause fondamentalement notre hypothèse sur la difficulté relative des tâches.

2.3. Les différences observées dans la réussite à la construction de C x C et C x F sont évidentes. L'analyse des procédures utilisées dans les deux types de situations confirmera qu'il s'agit bien, au moins pour les élèves avant le CM2, de différences profondes tenant à des représentations initialement différentes. Les paragraphes 3, 5 et 7 abordent directement ces questions : nous pouvons déjà dire que les représentations de C x F et celles de C x C évoluent différemment l'une à partir de rapports interdimensionnels (C x F), l'autre à partir de la considération de parties privilégiées de C (les ensembles à 1 ou 2 éléments).

La comparaison des épreuves de mise en correspondance analysées dans les paragraphes 10 et 11 nous conduira à poser le problème de la coordination de points de vue "additifs" (tels qu'ils sont sous-jacents à des représentations en termes de sous-ensembles) et "multiplicatifs" (sous-jacents à des représentations en produits) (en prenant les termes "additif" et "multiplicatif" en un sens ensembliste et non arithmétique (1).

---

(1) Une représentation additive du matériel E par exemple $\mathcal{D} \equiv \coprod_{c \in C} F_c$ avec $F_c \equiv F$, alors que la représentation multiplicative a pour modèle $\mathcal{D} \equiv F \times C$. Même s'il y a isomorphisme, il s'agit de représentations ensemblistes distinctes.

3 - CARACTERES D'EXHAUSTIVITE ET D'UNICITE DANS LES CONSTRUCTIONS DU PRODUIT C x F

Les premières expériences comportant des tâches de construction du produit C x F ("cartes-a") et C x C ("maisons-a") effectuées en 1967 étaient initialement destinées seulement à la comparaison des difficultés pour le produit A x B et pour le carré cartésien A x A. (Il faut rappeler que jusqu'alors les recherches sur le produit n'avaient jamais mis en oeuvr des constructions qui ne se réfèrent pas à un tableau de classification, et que l'objet essentiel concernait les relations entre les éléments placés dans les cases du tableau et les marges de celui-ci, et non pas directement des propriétés intrinsèques d'un résultat construit).

Nous n'avions pas alors prévu la richesse des protocoles recueillis auprès des élèves du primaire quant aux procédures, aux rangements, à l'utilisation selon les tâches des dimensions forme et couleur, etc. : nous avions donc choisi de travailler pour C x F et C x C dans des conditions analogues de présentation de la situation, de consigne, de relance éventuelle des enfants, sans analyser pour eux-mêmes ces effets de définition de la tâche. Par ailleurs les premières analyses effectuées en terme de construction complète et sans double nous ont montré que, à l'âge des sujet avec lesquels nous travaillions, nous observions relativement peu de discrimination selon les groupes ou selon les situations en étudiant séparémen l'unicité ou l'exhaustivité.

De plus, les éléments parmi les plus intéressants sont apparus comme ceux qui concernent les relations entre dimensions, en particulier le problème clé de la symétrie et de l'indépendance des deux facteurs du produit cartésien.

Nous avons donc effectué dans un premier niveau d'analyse un bilan global des constructions de produits C x F en termes de réussites strictes ou larges selon qu'on accepte ou non une "erreur" aussi bien pour l'exhaustivité que pour l'unicité.

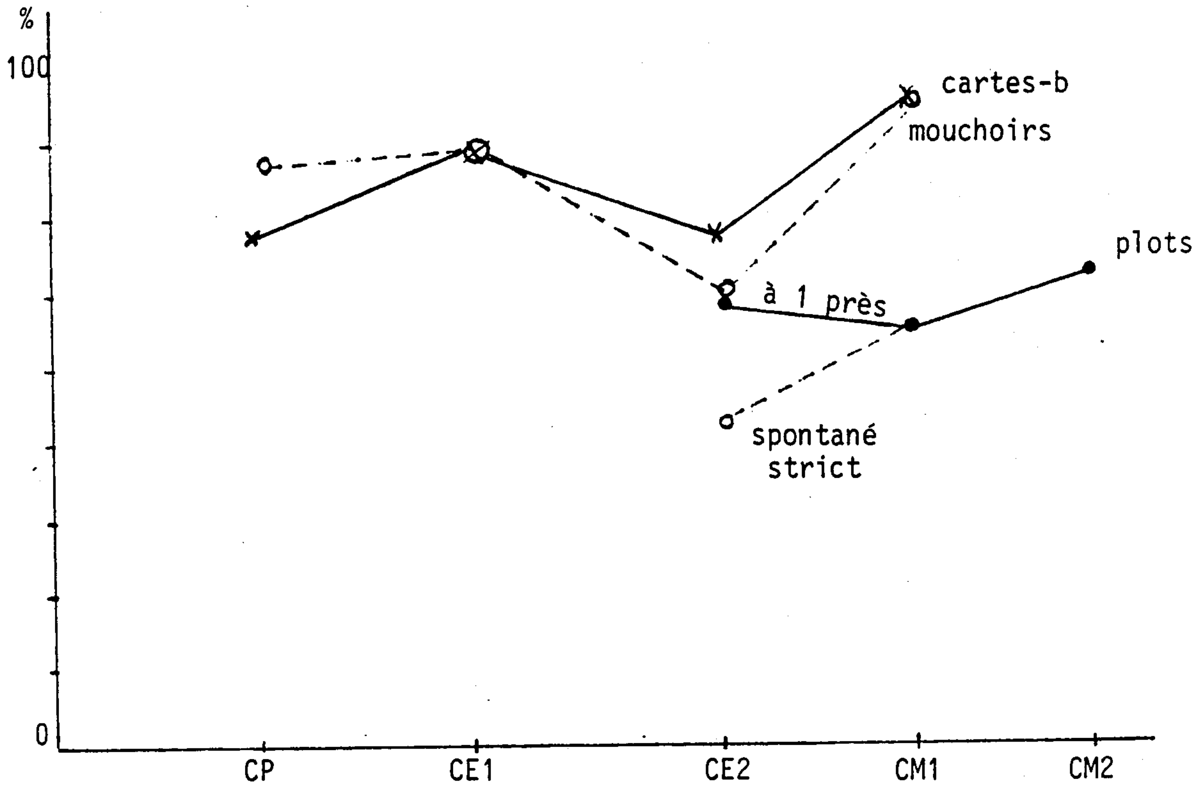
L'analyse des relations entre produit et complément (§ 6) nous permettra d'affiner notre étude sur ces questions de statut de l'unicité, cependant que les comparaisons effectuées sur des enfants de maternelle à CE1 sur le carré cartésien de formes et de couleurs apporteront des éléments complémentaires sur les rapports entre les deux contraintes d'unicité et d'exhaustivité (§ 7).

Nous reviendrons sur nos objectifs généraux sur ces questions au moment de la discussion d'ensemble à partir des résultats de ces analyses spécifiques.

3.1. Réussites aux tâches de construction de C x F

La figure 1 jointe donne les pourcentages de réussite globale de construction des cartes (réussite large), des mouchoirs (réussite large) et des plots (réussite large et réussite stricte). Dans chacune des situations la construction d'unicité était donnée aux enfants sous forme verbale, comme par exemple : "ne pas faire deux fois le même" et on "relançait" l'enfant en cas d'arrêt après la production de seuls éléments tous différents entre eux à la fois par la forme et la couleur.

Figure 1



Si nous nous référons à la comparaison précédemment faite entre la construction des cartes et celle des maisons nous pouvons apprécier les différences importantes entre le respect strict de l'exhaustivité et la réussite large : pour les cartes dans la version b la réussite stricte sur l'ensemble des sujets était en effet seulement de 60 % alors que la réussite large atteint 85 %.

De même les réussites strictes pour la construction des mouchoirs ne dépassent guère 70 % alors que les réussites larges atteignent près de 90 % On retrouve ainsi les mêmes niveaux de réussite stricte que pour la construction des cartes. L'analyse des procédures va apporter des éléments complémentaires sur les systèmes de représentations et de règles d'action qui peuvent conduire à ces constructions exhaustives ou presque exhaustives.

3.2. <u>Analyse des procédures de construction</u>

Les procédures de construction sont définies à partir de la constitution des séquences d'éléments construites par l'enfant, constitution étudiée du point de vue des ressemblances et/ou des différences selon l'une et/ou l'autre des deux dimensions forme et couleur.

3.2.1. Pour notre matériel formes x couleurs avec 3 formes et 4 couleurs, nous avons distingué les classes suivantes de procédures :

- balayage des formes : la séquence produite par le sujet peut être découpé en groupes de 3 éléments différant entre eux par la forme - les couleurs étant quelconques ;

- balayage des couleurs : la séquence peut se découper en groupes de 4 éléments de couleurs toutes différentes ;

- construction de pivots (1) : la séquence peut être découpée en groupes de 3 éléments différant à la fois par la forme et par la couleur ;

- construction systématique (forme ou couleur) : les couleurs (ou les formes) sont constantes sur une succession des 3 formes (ou des 4 couleurs)

- construction indifférenciée : nous regroupons dans cette catégorie les constructions au cours desquelles on ne peut distinguer la mise en oeuvre d'aucune de ces procédures.

En fait dans la mesure où les sujets respectent la consigne d'unicité ils ne peuvent pas toujours mener à son terme la conduite d'une procédure de type double balayage (ou pivot) : nous tenons compte de ces effets du matériel dans la classification des sujets selon les différentes classes de procédures.

3.2.2. Nous avons étudié les procédures utilisées dans les deux présentations différentes des matériels formes et couleurs des expériences de construction des plots et des cartes (version a, passée en premier sans interférence éventuelle des procédures avec celles mises en oeuvre pour la construction des maisons,ce qui est la situation dans la version b).

Les tableaux $I._3$ et $II._3$ donnent les répartitions en pourcentage des procédures utilisées respectivement pour les cartes et pour les plots.

---

(1) Voir l'analyse du protocole de Dom, en annexe de ce paragraphe.

TABLEAU I.3. (cartes a)

	CP	CE1	CE2	CM1	
BF	38 (31)	58 (42)	55 (45)	75 (75)	56 (43)
BC	15 (15)	25 (25)	45 (45)	12 (12)	24 (24)
DB	15 (15)	8 (8)	-	12 (12)	9 (9)
$\not{B}$	30 (-)	8 (8)	-	-	11 (2)

TABLEAU II.3 (plots)

BF	75 (80)	38 (13)	25 (19)	38 (31)	37 (23)
BC	25 (-)	31 (25)	13 (13)	6 (6)	17 (13)
DB	-	13 (13)	13 (6)	-	8 (6)
$\not{B}$	-	19 (-)	50 (31)	56 (31)	38 (19)

Les pourcentages entre parenthèses sont ceux des constructions exhaustives relevant des diverses procédures.

Ces tableaux, qui ne font encore rien apparaître quant aux utilisations des ressemblances (procédures de type S parmi les procédures de balayage), appellent les remarques suivantes :

- l'utilisation de procédures régulières de balayages d'une ou des deux dimensions diffère selon la réalisation matérielle des ensembles F, C et F x C : l'utilisation des procédures de balayage est quasi systématique dans la réalisation de l'expérience "cartes", elle est moins fréquente dans la construction des plots bien qu'étant dominante (plus de 60 % des sujets) ;

- les procédures régulières sont plus efficaces quant à l'exhaustivité du résultat que les autres procédures, l'efficacité étant plus grande pour les cartes que pour les plots ;

- les deux dimensions forme et couleur n'ont pas la même "productivité" du point de vue des procédures et de leur efficacité : le balayage des formes est deux fois plus fréquent que celui des couleurs, et moins efficace - dans le même rapport de 3 à 4 environ - pour les deux expériences "cartes" et "couleurs".

Nous reviendrons sur ces différences entre dimensions dans le paragraphe 5 sur les rapports interdimensionnels dans le produit.

3.2.3. Nous allons maintenant analyser les procédures de balayage selon qu'elles maximisent les différences ou les ressemblances entre éléments successivement construits par l'enfant. Nous allons dans ce but, classer les procédures de la manière suivante :

- procédures P : balayages maximisant les différences ;

- procédures S : balayage d'une dimension avec conservation de la valeur de l'autre sur chaque groupe d'éléments ;

- procédures D : balayage d'une seule des dimensions sans maximisation des différences ni des ressemblances pour l'autre.

(Les procédures A sont celles où il n'y a pas de balayage.)

Le tableau III_3 donne la répartition (en pourcentage) des sujets selon ces procédures pour l'ensemble des élèves de CE et de CM pour chacune des expériences "cartes" et "mouchoirs".

TABLEAU III.3

PROCEDURES	P	S	D	A
"cartes"	33	36	21	10
"mouchoirs"	21	19	25	35

Le premier point qui se dégage de ce tableau c'est que globalement les relations de différence et celles de ressemblances sont utilisées dans les mêmes proportions, elles sont simplement plus fréquentes dans la construction des cartes.

Une étude des répartitions dans les sous-groupes de CE et de CM indiqu cependant que cette similitude de traitement est seulement partiellement vraie (pour la construction des plots) : l'utilisation des relations de différence diminue du CE au CM, fortement pour la construction des cartes, et les procédures systématiques sont nettement plus nombreuses en CM pour la construction des cartes.

3.3. Les premières relations que nous pouvons voir apparaître entre le résultat des constructions d'un matériel produit et les procédures utilisées dans des réalisations différentes de C x F permettent d'avancer quelques hypothèses sur les relations entre les systèmes de représentation des enfan et leurs règles d'action dans des situations données :

- la présentation du matériel, ici particulièrement des formes qui donnent en quelque sorte la présence permanente d'un modèle de l'ensemble F, semble jouer un rôle dans l'utilisation et l'efficacité de procédures de balayage. Un système de représentation qui présuppose seulement l'indépendance des de dimensions et la maîtrise des relations de ressemblance et de différence dans l'une des dimensions peut suffire à la production d'un ensemble en bijection avec C x F si les règles d'action suivantes peuvent être correctement exécutées (et donc si un contrôle efficace peut être mis en oeuvre tou au long de leur exécution) :

- balayage des valeurs d'une des dimensions ;

- variation ou conservation systématique des valeurs de l'autre dimension ;

- anticipation d'un nouvel élément à venir selon ces règles et comparaison aux éléments déjà présents, choix - quand il existe - d'un élément différen Si le matériel réalise une présentation compatible avec un balayage et avec la comparaison de l'élément anticipé aux éléments déjà construits, la probabilité d'une construction complète avec 3 formes et 4 couleurs est assez grande dès lors qu'une indépendance suffisante des dimensions permet une exploration d'un ensemble (petit) de valeurs de la dimension non "balayée (1).

Néanmoins l'exhaustivité stricte n'est pas assurée sans que d'autres procédures de contrôle soient utilisées : nous verrons plus loin dans l'étud des rangements que les représentations du but à atteindre (C x F) peuvent s'avérer insuffisantes (même dans les conditions de présentation favorables) pour assurer l'exhaustivité et que les rangements qui permettent une analyse a posteriori de l'ensemble construit peuvent être nécessaires pour l'exhaustivité.

Nous verrons par ailleurs dans le paragraphe 6 qui présente l'expérienc des "mouchoirs" l'importance, au niveau des représentations, de l'indépendance des dimensions.

---

(1) Il apparaît en particulier qu'une procédure systématique de construction de tous les éléments d'une forme ou d'une couleur donnée n'est en rien nécessaire pour une construction correcte ; les analyses suivantes montreront de plus qu'une représentation du produit prenant en compte son organisation bidimensionnelle ne produit pas nécessairement de telles procédures dans les situations du type choisi, et que d'autre part certaines de ces procédures reflètent une non prise en charge de l'indépendance des dimensions.

ANNEXE CHAPITRE 3

I - Analyse détaillée de deux protocoles d'enfants de 6;8 ans (Dom) et 8;5 ans (Pat).

Ces protocoles ont un certain caractère de représentativité au niveau des procédures utilisées ; ils nous permettront de définir, sur exemples, les notions utilisées ailleurs dans la description des procédures.

Protocole de Dom

Le protocole suivant est celui de Dom, élève de cours préparatoire, et âgé d'un peu plus de six ans et demi (donc en 1ère année de primaire).

Dom décrit correctement les formes présentées (carré, rond, lune), ainsi que les couleurs. Dès que la consigne lui est donnée, il construit sans interruption les trois cartes suivantes

Lj Cb Rr

Après ces trois cartes, il déclare "ça y est". A la demande de l'expérimentateur :
"*Tu ne peux plus en faire ?*" Dom répond :
"*Si : un carré, un rond, puis encore une lune*".
Dom dessine alors, sans interruption ni commentaire, la succession suivante :

Cv Rj Lb Cr Rv

Après cette carte, Dom prend en main le crayon bleu, regarde le tas des lunes non colorées, et dit spontanément : "*je l'ai déjà fait*" ; prenant alors un cercle, il dessine :

Rb

Dom prend alors le crayon jaune, fait le même commentaire concernant le tas des lunes, prend un carré et dessine :

Cj

Il demande alors spontanément : "*Qu'est-ce que j'ai pas fait ?*". L'expérimentateur ne répond pas et ne donne aucune indication sur ce qu'il faut faire pour cette vérification des cartes manquantes.

Dom prend alors les cartes, qu'il avait alignées suivant leur ordre de construction, et les regroupe en deux tas :

(lunes) et (ronds et carrés)

Sur l'interrogation de l'expérimentateur : "*Qu'est-ce que tu as mis dans ce paquet ?*" (en désignant (retc)), Dom, sans répondre, décompose (retc) en (r) et (c), il se trouve donc devant la partition :

(lunes) , (ronds) , (carrés)

correspondant à un groupement des formes identiques, les trois ensembles contenant respectivement 2, 4 et 4 cartes.

Dom ne trouve pas les cartes manquantes à partir de cette partition. L'expérimentateur l'incite à "ranger autrement". Dom fait alors une partition suivant la couleur, en quatre parties :

(verts), (jaunes), (rouges), (bleus)

qui ont respectivement 2, 3, 2 et 3 éléments. La partition effectuée, Dom s'exclame : "*Il me manque deux lunes*" et construit :

Lr et Lv

et s'arrête, assuré d'avoir construit toutes les cartes voulues.

Analyse du protocole de Dom

Les trois premières cartes construites : Lj, Cb et Rr sont telles que deux d'entre elles n'ont en commun ni la forme ni la couleur ;

Définition

On appelle, dans un produit, un ensemble P tel que le précédent un ensemble pivotal : deux points quelconques d'un ensemble pivotal ont leurs deux coordonnées différentes.

De plus, en raison du nombre d'éléments de cet ensemble et des cardinaux de F et C tout autre élément de F x C a nécessairement en commun une forme, avec l'une des cartes de P.

Un ensemble pivotal ayant cette propriété est appelé un ensemble pivotal maximal.

Lorsque les deux dimensions ont le même nombre de valeurs un ensemble pivotal maximal "représente" toutes les formes et toutes les couleurs. Un tel ensemble est appelé un pivot.

Par abus de langage, nous appellerons aussi pivot un ensemble pivotal maximal dans le cas où card $|F| \neq |C|$. On dira parfois aussi, s'il n'y a pas de confusion possible sur l'ensemble pivot, qu'un élément d'un pivot est un pivot.

La construction d'un ensemble tel que P (par un sujet) correspond à unemaximisation des différences entre les cartes. Cette exigence de maximisation n'est pas due seulement à la consigne "ne fais pas deux cartes pareilles" ; en effet le sujet construit ensuite d'autres cartes qui vont donc ressembler à une carte déjà construite, puisqu'elles auront la valeur d'une dimension en commun. L'analyse d'autres protocoles nous a par ailleurs montré qu'un certain nombre d'enfants, qui construisent de tels pivots, ne marquent pas de temps d'arrêt entre un pivot et les cartes suivantes, voire rangent les cartes suivant leur forme (au cours de la construction même).

Etudions maintenant, sur le protocole de Dom, la succession des cartes.

1. Construction d'un pivot Lj Cb Rr
2. Succession Cv Rj Lb Cr Rv
3. bR jC

(La notation Lj signifie que c'est la forme L qui est choisie en premier, bR que c'est la couleur (b)).

Nous appuyant sur la remarque de Dom après constructio du premier pivot "il y aura un carré, un rond puis enc une lune", intéressons-nous aux successions de formes.

On peut décomposer la construction pendant les phases 1 et 2 en :

- un premier ensemble F_1 (Lj Cf Rr) isomorphe à l'en semble F de départ (L, C, R),

- un second ensemble F_2 (Cv Rj Lb) également isomor à F,

- enfin un ensemble F'_3 qui ne comporte que 2 formes (Cr, Rv).

Cette décomposition nous permet de commencer d'interpréter le commentaire de Dom quand désignant le tas des lunes il annonce "Je l'ai déjà fait" : la forme L est bien en effet la forme nécessaire pour compléter F'_3 en un F_3 isomorphe à F.

Afin de comprendre pourquoi, après cette réflexion, Dom ne construit pas Lr ou Lv qui manquent il faut analyser la répartition des couleurs dans les phases 1 et 2 : les ensembles F_1 et F_2 non seulement sont isomorphes à F mais ce sont aussi des pivots. Pour compléter F'_3 en un pivot F_3 il faudrait prendre comme forme L et comme couleur soit le bleu soit le jaune. Or Lb et Lj ont déjà été faites.

Le comportement de Dom confirme l'analyse de cette procédure : prenant le "feutre" bleu, il regarde le tas de lunes à faire et précise : "je l'ai déjà fait". Il utilise néanmoins le bleu pour faire un rond. Il essaie ensuite le jaune, fait la même remarque, et utilise le jaune pour faire un carré. Le passage à la phase 3 se fait donc sur la base de la succession des couleurs ; c'est une solution utilisée pour Dom pour résoudre la contradiction entre la construction de pivots successifs et l'exigence de ne pas avoir de doubles.

Remarquons que :

- les 4 premières cartes L, Cb Rr Cv forment un ensemble C_1 isomorphe à l'ensemble C des couleurs. Il en est de même des 4 cartes suivantes Rj Lb Cr Rv. (l'ordre de succession des couleurs est d'ailleurs le même)(1).

---

(1) Nous appellerons ce type de succession un "balayage des couleurs". Le "balayage des formes" est la succession analogue pour les formes.

Lorsque, sur incitation de l'expérimentateur à "ranger autrement", Dom effectue une classification selon la couleur, il obtient quatre ensembles de 3, 3, 2 et 2 éléments respectivement, dont deux sont isomorphes à F (les "jaunes" et les "bleus"). Le complément des deux autres, pour obtenir des ensembles isomorphes à F, est alors immédiat ; Dom marque d'ailleurs sa certitude d'avoir construit toutes les cartes voulues.

Remarquons que la classification qui s'avère opératoir n'est pas la classification spontanée, qui comporte se propres limites.

<u>Protocole de Pat</u>.

Le protocole abrégé d'un enfant de CE2 (8;5 ans).

Pat va nous permettre de montrer un type de constructi différent.

La construction des cartes par Pat se fait sans interruption dans l'ordre suivant :

Cj Rv Lb Cr Rj Lr Cv Rr Lj Rb Cb Lb Lv

La lune bleue construite en avant-dernière carte est aussitôt éliminée car Pat s'aperçoit qu'elle est déjà faite.

Comme pour Dom on peut décomposer cette construction e 4 ensembles dont chacun est isomorphe à F :

F_1 = Cj Rv Lb
F_2 = Cr Rj Lr
F_3 = Cv Rr Lj
F_4 = Rb Cb Lb aussitôt remplacé par (Rb Cb Lv).

Mais on peut remarquer une différence: non seulement les F_i ne sont pas tous des pivots (seuls F_1 et F_3 le sont) mais F_4 est d'abord construit comme unicolore :
$F_4 \equiv \{b\} \times F$:
en témoigne le fait que Lb est dans F_4, or Pat n'a fait jusque là aucun double (il s'aperçoit d'ailleurs immédiatement que Lb est déjà fait).

Le rangement spontanément effectué (simultanément à la construction) est le suivant :

Cj	Cr	Cv	Cb
Rv	Rj	Rr	Rb*
Lb	Lr	Lj	Lv

*dès que Rb est posé il est échangé avec Rr : on peut remarquer, comme chez Dom, une contrainte de différenciation des couleurs dans chaque groupe des trois forme malgré la construction de F_4.

La différence majeure - et décisive - avec Dom est que cette exigence n'introduit pas de contradiction avec celle de ne pas faire de doubles et que Pat construit spontanément l'ensemble C x F complet. De plus, Pat n'a pas besoin, comme Dom, d'une classification explicite selon les couleurs pour faire toutes les formes pour chaque couleur : au contraire - et la dernière séquence Cb Rb Lb en témoigne) Pat peut s'appuyer sur une représentation préalable - qui lui permet de réaliser une différenciation des couleurs dans un rangement selon la forme, sans que cela impliq des contradictions internes à la construction comme pour Dom.

Nous pouvons tirer une remarque, à valeur générale, de la comparaison de ces deux protocoles. Un même comportement : la procédure de "balayage des formes" prenc une signification différente quand on l'insère dans un ensemble de conduites. Cette procédure de balayage est fréquente et se manifeste sur plusieurs niveaux d'âges mais l'analyse précise des protoles de Dom et de Pat indique que cette procédure change de statut au cours de l'évolution des représentations du produit cartésiei

D'autre part, l'exhaustivité de la construction de F x passe chez Dom et chez Pat par des voies différentes : elle nécessite chez l'un des deux enfants un changemen de classification, suscité par l'expérimentateur ;(il faut remarquer que ni chez l'un ni chez l'autre la réussite à la construction de F x C n'exige de procédure systématique ou de doubles classifications..).

4 - DENOMBREMENTS, ADJONCTIONS, RANGEMENTS

4.1. Réponses numériques

Nous avons analysé les opérations de type numérique effectuées par les enfants sur les produits C x F. La première épreuve de construction de cartes (version a) ayant mis en évidence la difficulté des enfants jusqu'au CE de prévoir le nombre de nouvelles cartes qu'ils pourraient construire avec une couleur supplémentaire, et une difficulté également à répondre "en aveugle" à une question du type de : "Combien as-tu fait de rouges ?", nous avons organisé un questionnaire systématique de dénombrement "en aveugle" et de prédiction du résultat de l'adjonction pour chacune des deux dimensions dans les expériences de construction des cartes et des mouchoirs (1).

La figure 2 donne la répartition en pourcentage des réponses numériques correctes pour le dénombrement et pour l'adjonction correspondant à chacune des deux dimensions forme et couleur (différemment réalisées dans la construction des cartes et dans celle des mouchoirs).(fin du § p. 52).

Rappelons que les enfants sont tous à "l' âge normal" de leur classe dans les groupes d'élèves de ces deux expériences et qu'il s'agit d'enfants différents.

Des courbes fictives (2) ont été construites à partir des résultats bruts en identifiant les points pour lesquels les différences de résultats étaient

---

(1) L'expérience comportant la construction des plots était destinée à la comparaison des opérations de construction, de rangement spatial et de mise en correspondance de deux produits C x F ; nous n'avons pas développé dans cette expérience l'étude des réponses numériques, nous avons seulement relevé pour les enfants de CE les réponses de prédiction pour chacune des deux dimensions, en vue de compléter nos éléments de connaissance sur les rapports interdimensionnels. Nous n'en parlerons pas dans ce paragraphe.

(2) Courbes avec trait double.

sans signification compte tenu du nombre de sujets en jeu. Cela nous permet de rendre plus lisibles et les similitudes et les contrastes dans les relations interdimensionnelles.

Un certain nombre de points ressortent de la comparaison de ces résultats avec ceux des réussites globales.

Avant le CM1 (9 ans) on observe des décalages importants entre la réussite globale à la construction et les réponses numériques. Seul le dénombrement des cartes d'une forme donnée est presque aussi bien réussi que la construction (réussite large, précisons-le) à partir du CE ; les autres tâches de dénombrement apparaissent nettement plus difficiles que la construction proprement dite jusqu'au CM1 où l'ensemble des tâches de construction et de dénombrement est maîtrisé par presque tous les enfants.

Les tâches de prévision (posées avant celles de dénombrement dans le déroulement des épreuves) apparaissent très difficiles pour les enfants et l'amélioration des réponses est très lente : au CM1 encore, une minorité d'enfants a une représentation du produit C x F assez disponible et opératoire pour anticiper immédiatement l'ensemble des éléments nouveaux à construire avec une valeur nouvelle pour l'une ou pour l'autre dimension.

Par ailleurs, l'existence d'un traitement différent des deux dimension apparaît clairement : les réponses concernant la forme sont meilleures que celles concernant la couleur avec le matériel des cartes avec des écarts particulièrement importants pour les tâches de dénombrement par les enfants du CE. Pour le matériel des mouchoirs la situation est inverse : les répons concernant la couleur sont meilleures (pour le dénombrement en CP et CE il a presque échec complet).

Il nous faut remarquer que comme pour les réussites globales les réponses numériques de dénombrement évoluent avec un "palier" marqué entre le CE1 et le CE2 ; ce fait se reproduit pour d'autres comportements concernant la construction ou le complément dans le produit (voir produit et complément, page 78 du texte de l'article, paragraphe 6). On retrouvera l'exis tence d'un tel palier dans certaines des tâches de construction de C x C (voir le chapitre 7) : or il s'agit de trois populations d'enfants distinctes (maisons-a, cartes-b, mouchoirs). Il nous semble donc justifié de pointer là un phénomène étroitement lié au déroulement du processus d'évolution des systèmes de représentation du produit, et des règles d'action qui lui sont liées.

Nous analyserons de façon plus spécifique les rapports entre dimensions tels qu'ils apparaissent dans ces tâches dans le paragraphe 5 consacré à cette étude.

Pour les plots et pour les mouchoirs les questions de prévision ont été posées également après celles de dénombrement sur la même dimension. Les résultats montrent qu'il est possible d'intervenir sur la mobilisation de représentations existantes mais non spontanément disponibles. En effet, la figure 3 qui représente (pour les mouchoirs) l'évolution des prévisions numériques complètement correctes et celles tout à fait fausses traduit une amélioration des réponses dans tous les groupes ; et pour cette situation la différence entre les enfants de CE1 et ceux de CE2 est positive et beaucoup plus importante qu'entre le CP et le CE1.

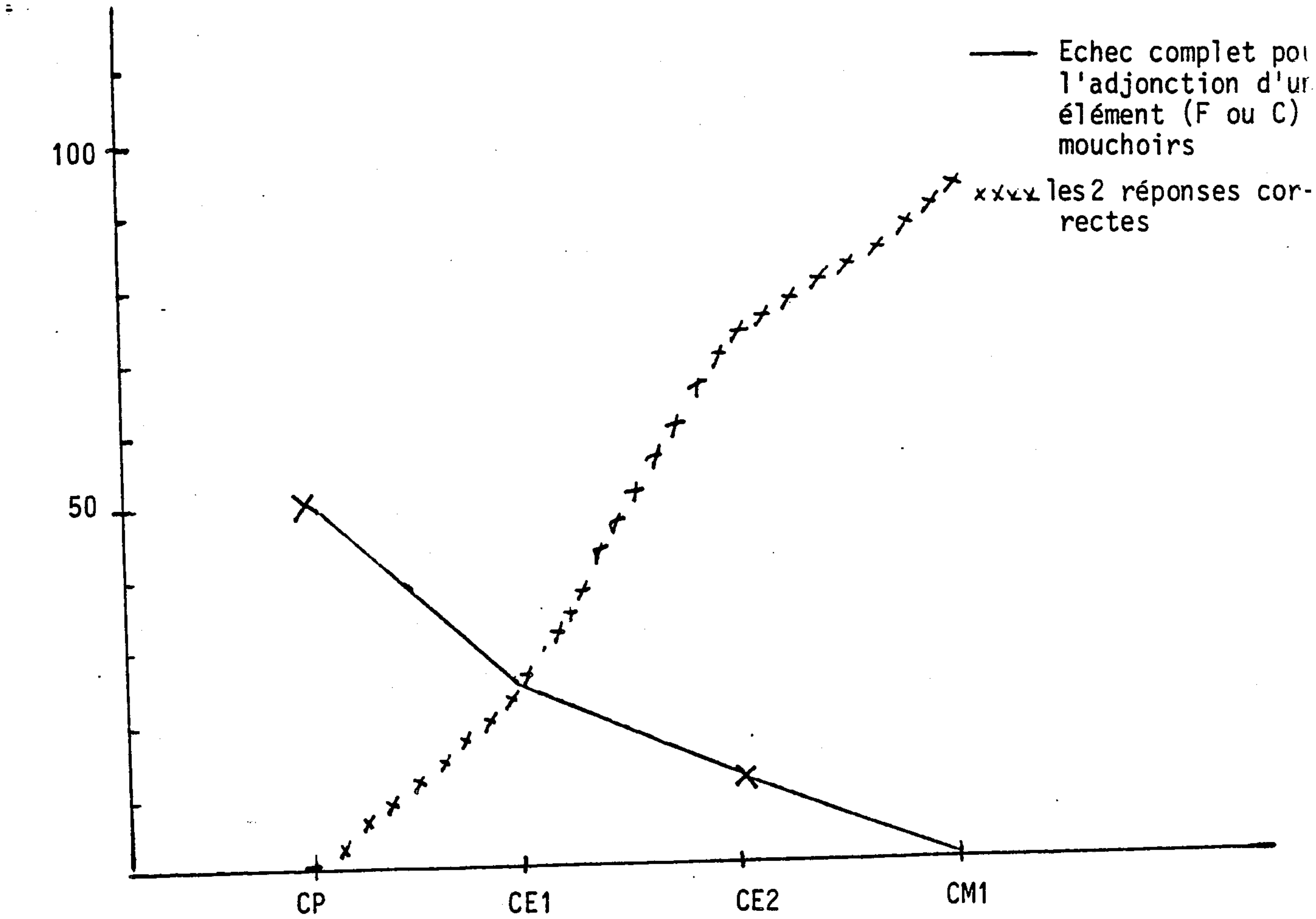


Figure 3

La figure 3 donne l'évolution des échecs complets (trait plein) et des réussites complètes (trait croix) pour les 2èmes réponses numériques de prévision de l'adjonction (F et C) pour les mouchoirs.

4.2. Les rangements

Ils peuvent avoir été spontanément produits par le sujet à un moment quelconque de la construction, ils peuvent être la réponse à une incitation de l'expérimentateur : "Peux-tu ranger pour voir si tu as tout fait" ; ils peuvent aussi être une tâche spécifique après toutes les questions numériques qui suivent la construction elle-même.

4.2.1. Nous allons comparer pour les cartes (a) et les plots les rangements spontanés et les rangements finaux (spontanés + suscités) concernant l'ensemble des sujets. Nous présenterons ensuite une étude plus détaillée des différents groupes d'âge pour chacune de ces expériences.

Le tableau I.4 donne la répartition des conduites de rangement spontané puis avec incitation éventuelle (en pourcentage, sur l'ensemble des sujets de 7 à 10;6 ans). Les notations sont les suivantes :

- RF désigne un rangement selon la forme ;
- RC désigne un rangement selon la couleur ;
- RP désigne un rangement en produit (matrice) ;
- ∅ désigne une absence de rangement selon des critères de dimension commun

TABLEAU I.4

	R Spontané		R Final	
	Cartes	Plots	Cartes	Plots
∅	33	60	18	35
RF	55	25	70	44
RC	6	8	-	13
RP	6	8	12	8

L'évolution des rangements selon l'intervention de l'expérimentateur est marquée dans les deux situations et se traduit essentiellement par la constitution de nouveaux rangements selon la forme, faisant diminuer la différence entre le traitement des deux matériels produits. Néanmoins le matériel pour lequel n'existe pas de rangement préalable[(1)] des représentants de chaque dimension (construction des plots P) est l'objet de moins de conduites de rangement spontané ou après incitation ; dans les deux cas les dimensions sont utilisées de façon très dissymétrique, même pour les plots où n'existe pas d'asymétrie dans la présentation des dimensions.

4.2.2. Les évolutions des rangements avec l'âge, ainsi que leurs rapports av… la qualité globale des réponses de construction sont analysées séparément pour les cartes et pour les plots. (Rappelons que les rangements sont en relation étroite avec le processus de construction de l'ensemble C x F cherché ; il y a donc une interaction possible avec les procédures : nous effectuons donc l'analyse de la construction des cartes dans la version a où C x F est construit avant C x C).

Le tableau II_4 donne la répartition en pourcentage des rangements des cartes qu'ils soient spontanés ou obtenus après incitation ; les rangements doubles RD correspondent soit à des rangements produit (en matrice) soit à deux rangements successifs selon une dimension puis l'autre.

TABLEAU II.4

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	S
Ø	8	-	18	30	-	12
RF	62	83	36	40	(25)	56
RC	15	17	-	-		4
RD	15	-	46	30	(75)	28

(1) Au niveau du matériel de formes et de couleurs fourni au sujet au dé… de l'expérience.

On voit une évolution importante entre le CE1 et le CE2, traduite par une diminution des rangements selon la forme seule, qui nous semble avoir une double signification : d'une part les enfants plus âgés peuvent mieux utiliser deux critères successifs de rangement mais aussi ils peuvent avoir des modes de contrôle de l'exhaustivité liés à une représentation suffisante pour se passer du support du rangement actualisé.

Cette hypothèse qui va au-delà des stricts résultats statistiques du tableau précédent, augmentation des rangements selon 2 critères successifs, et des absences de rangements du CE1 au CE2, peut être appréciée avec l'analyse de ce qui se passe dans la construction des plots.

Nous avons noté l'existence et la nature des rangements spontanés effectués au cours de la construction des plots par les élèves des différentes classes ainsi que celles des rangements obtenus après incitation à ranger, incitation qui a concerné les sujets qui n'étaient pas arrivés à une construction exhaustive.

Le tableau III_4 donne la répartition en pourcentage des différents types de rangements spontanés (entre parenthèses le pourcentage de constructions exhaustives) pour les différents niveaux scolaires. (Les enfant de CE ont été regroupés car il y a dans ces groupes peu d'enfants de CE1, étant donnés les objectifs de l'expérience "plots").

TABLEAU III.4

	CE	CM1	CM2	S
Ø	65 (20)	50 (19)	63 (31)	60 (23)
RF	25 (20)	31 (30)	19 (19)	25 (23)
RC	-	13 (13)	13 (13)	8 (8)
RP	10 (10)	6 (6)	6 (6)	8 (8)

Nous observons du CE au CM2 un changement dans les rapports entre l'existence d'un rangement et la réussite à une construction exhaustive : en CE le rangement est important pour aboutir à la réussite, en CM2 près de la moitié des réussites correspondent à une absence de rangement spontané, et près de la moitié des sujets qui ne rangent pas réussissent néanmoins une construction exhaustive. Cela va dans le sens de l'hypothèse avancée plus haut.

En revanche nous n'observons pas de différence (du CE au CM) dans l'utilisation de la forme seule comme critère du rangement : il nous semble y avoir là une différence due à la présentation de la réalisation de l'ensemble F dans chacune des deux tâches de construction.

Le tableau IV_4 donne la répartition des rangements induits (pour les plots).

(Nous avons dans ce tableau donné le nombre de sujets concernés et non les pourcentages par groupe (le groupe de CE comprend 20 sujets, les groupes de CM chacun 16 sujets)).

TABLEAU IV.4

	CE	CM1	CM2	S
Ø	1			
RF	4 (1)	3 (1)	3	10 (2)
RC	1 (1)	-	2 (1)	3 (2)
RP	-	-	-	-

Nous vérifions que les rangements induits sont de façon dominante des rangements selon la forme, mais, à la différence des rangements spontanés, peu de ces rangements vont conduire à la complétion de C x F. La mobilisation d'une telle opération n'a donc pas les mêmes caractères opératoires que la disponibilité. On retrouve ce point en considérant comment les différentes réponses se suivent : en CE, 50 % des enfants font une construction exhaustive spontanée, après incitation à un rangement ce pourcentage passe à 60 % mais les réponses numériques correctes dans la prévision de l'adjonction reviennent à 50 %.

Nous retiendrons sur ce point l'hypothèse plus générale que la disponibilité d'une opération qui permet un résultat correct a effectivement une signification opératoire alors que la mobilisation, lorsqu'elle intervient, a un caractère local, qui ne suffit pas à rendre opératoire les résultats ainsi acquis.

4.2.3. Rangements sur un "produit spatial"

L'analyse qui suit est celle des rangements des mouchoirs, préalablement construits, sur un "produit spatial" : on fournit aux enfants à la fin de leur construction un tableau comportant 12 cases, organisées en 4 lignes x 3 colonnes (d'où le terme de produit spatial) sur lequel ils doivent ranger les mouchoirs en les plaçant un par un. Notre objectif est d'étudier au travers des conduites des enfants les hypothèses implicites qu'ils font pour mettre en rapport un matériel représentable par un produit "combinatoire": couleurs x formes et un matériel organisé selon un produit spatial: colonnes x lignes.

Cela doit nous permettre, avec l'une des tâches analysée au paragraphe d'apprécier les analyses méthodologiques concernant les rapports entre relations ensemblistes et relations spatiales.

Nous avons classé les rangements de la façon suivante :

<u>MAT</u> : les formes sont placées selon les colonnes (1 forme par colonne) et les couleurs selon les lignes (1 couleur par ligne) de sorte que le résultat constitue une disposition "matricielle" ;

<u>FCO</u> : rangement des formes en "colonnes", sans rangement spécifique des couleurs ;

<u>FLI</u> : rangement des formes par proximité (linéaire) horizontale ;

<u>FSE</u> : rangement des formes communes en groupes spatialement voisins autres que FCO et FLI ;

<u>CLI</u> : rangement des couleurs selon les lignes, sans rangement spécifique des formes ;

<u>CCO</u> : rangement des couleurs par alignement vertical dans les colonnes ;

<u>CSE</u> : couleurs spatialement voisines, autres que CLI et CCO ;

<u>FDI</u> : rangement de formes distinctes sur chaque ligne ;

<u>CDI</u> : rangement de couleurs distinctes sur chaque colonne ;

<u>NRA</u> : résidu.

Nous avons rendu la classification exclusive en donnant priorité à MAT (sur FCO et CLI), et en donnant la priorité à la représentation de la similitude par la proximité sur la représentation de la différence par la proximité (1). Ce choix concerne peu de sujets.

---

(1) Ainsi par exemple un sujet qui met en colonne les mêmes formes et en ligne des couleurs toutes différences seront classées FCO (et non CDI)

Les sujets sont classés en 5 groupes de 12 sujets : deux groupes de CP (novembre et mai), un groupe pour le CE1, le CE2 et le CM1, à"l'âge normal" de leur classe.

Ce tableau $V._4$ donne la répartition en pourcentage (1) globale des rangements MAT, des rangements FSI où la similitude de forme est représentée par la proximité spatiale et CSI (analogue à FSI pour la couleur) et RES (aucun de ces comportements de "similitude").

Distribution (entre parenthèse en nombre de sujets) des rangements respectant la relation "proximité spatiale"/"égalité dimensionnelle".

TABLEAU V.4.

moy.âge	CP 6;2	CP' 6;8	CE1 7;3	CE2 8;3	CM1 9;3	Σ
MAT	17(2)	-	-	-	25(3)	8
FSI	8(1)	33(4)	42(5)	33(4)	58(7)	35
CSI	25(3)	8(1)	8(1)	33(4)	8(1)	17
RES	50(6)	58(7)	50(6)	33(4)	8(1)	40

L'évolution apparaît complexe, on peut cependant dégager quelques éléments :

- jusqu'en CE2 les rapports entre la similitude dimensionnelle et la proximité spatiale ne sont pas majoritairement spontanés : ils concernent à peine la moitié des sujets de CP à CE1 ;

(1) Les pourcentages sont donnés essentiellement pour faciliter les comparaisons.

- en CM1 la similitude de forme est spontanément représentée par la proximité spatiale pour 80 % des sujets.

Le tableau VI.4 suivant va nous permettre de préciser nos remarques en fonction des caractères spécifiques des relations de différence ou de ressemblances traduites spatialement.

Distribution des sujets selon leur rangement :

TABLEAU VI.4

	CP		CP'		CE1		CE2		CM1		Σ	
MAT	2		-		-		-		3		5	
FCO	-		1		1		2		3		7	
FLI	-	1	2		3		1		2		8	
FSE	1		1	4	1	6	1	5	2	8	6	24
FDI	-		-		1		1		1		3	
CLI	1		1		1		4		1		8	
CSO	1	4	-	3	-	3	-	7	-	1	1	18
CSE	1		-		-		-		-		1	
CDI	1		2		2		7		-		8	
NRA	5		5		3		-		-		13	

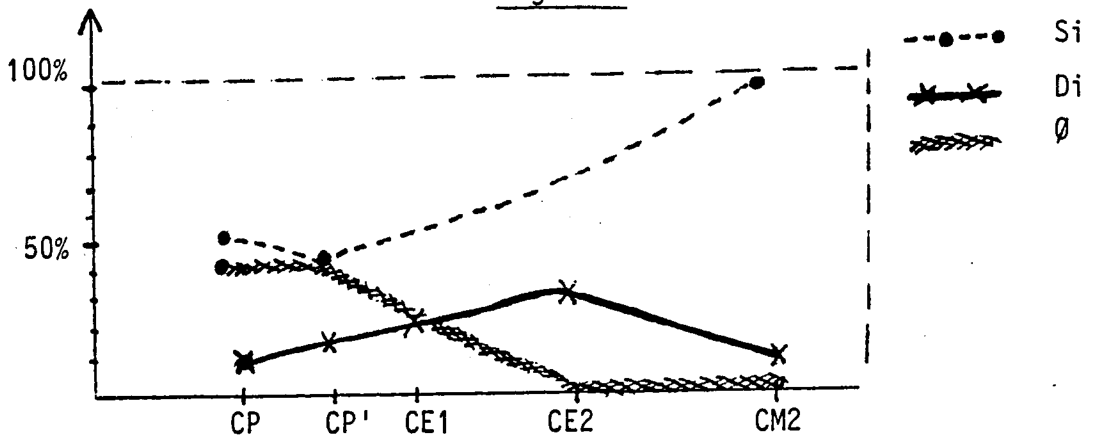
Nous voyons se dégager plus précisément l'évolution des rapports entre espace et dimensions (résumée dans la figure 4) :

- la non prise en compte spontanée diminue de 40 % en CP à 0 % à partir du CE2 ;

- les rapports de similitude dimensionnelle passent de 50 % en CP et CE1 à 90 % en CM1 ;

- la considération des différences, bien que toujours faible, atteint de 25 à 30 % en CE.

Figure 4



Remarquons que l'asymétrie numérique entre les 2 dimensions introduit des contraintes particulières. Ainsi, par exemple, l'alignement (horizontal) des formes semblables entre en contradiction avec le fait qu'il y a 4 formes identiques et seulement 3 places "horizontales", dès la 2ème ligne l'enfant obtient alors 2 formes distinctes présentes sur le même alignement, ce qui peut le conduire à changer de procédure.

La compatibilité des relations dimensionnelles et spatiales se manifeste par des rangements MAT, FCO et CLI : ils passent d'à peine 20 % en CP et CE1 à guère plus de 50 % en CE2 et CM1 (où 4 sujets sur 12 ont fait un rangement des formes selon d'autres proximités que FCO (par alignement ou regroupement)).

Des procédures de rangement "de proche en proche" comme on en observe chez les jeunes sujets (A. Nguyen Xuan, 1983) peuvent alors entrer en contradiction avec les caractéristiques numériques de C x F et du produit spatial (lignes x colonnes). Une analyse de leur structure respective est ainsi au moins implicitement, nécessaire pour que la compatibilité soit assurée entre les choix dimensionnel et spatial.

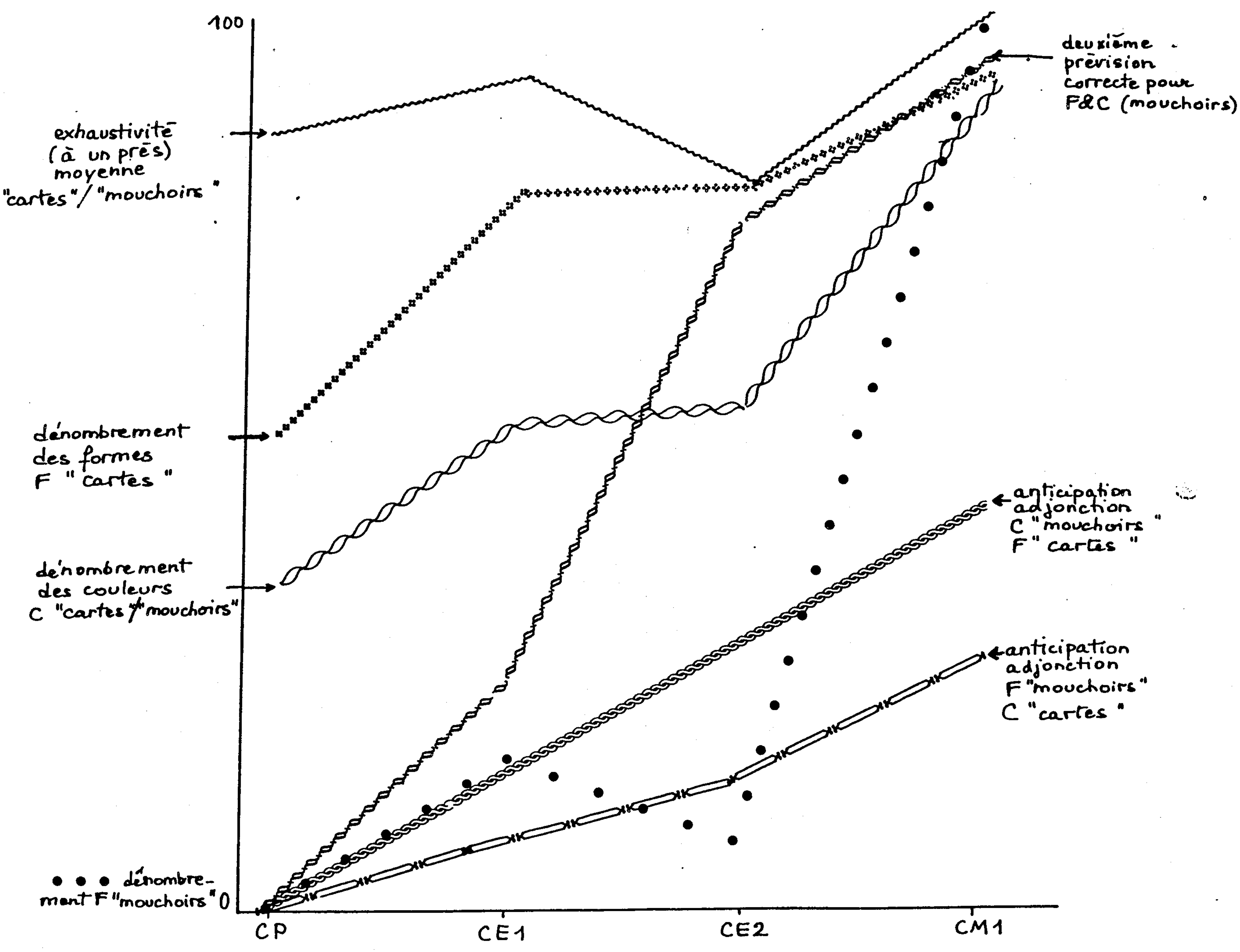

100
0
CP
CE1
CE2
CM1
exhaustivité (à un près) moyenne "cartes"/"mouchoirs"
dénombrement des formes F "cartes"
dénombrement des couleurs C "cartes"/"mouchoirs"
● ● ● dénombrement F "mouchoirs"
deuxième prévision correcte pour F&C (mouchoirs)
anticipation adjonction C "mouchoirs" F "cartes"
anticipation adjonction F "mouchoirs" C "cartes"

fig.2

5 - RAPPORTS INTERDIMENSIONNELS

L'analyse des tâches de type 2 (dénombrements, prévision, rangements) a mis en évidence une asymétrie de traitement des dimensions forme et couleur dans un produit F x C.

Cette asymétrie, présente dans les réalisations différentes : cartes, plots et mouchoirs, ne se traduit pas par une dominance systématique de la dimension forme ou de la dimension couleur.

Les tâches de prévision spontanée et celles de dénombrement "en aveugle ont montré des rapports inversés entre forme et couleur pour les "cartes" et les "mouchoirs".

Nous allons donc étudier les rapports interdimensionnels à l'intérieur de chaque réalisation.

5.1. Les rapports interdimensionnels dans le matériel "cartes"

Nous pouvons seulement comparer des réponses d'ensemble, puisque les tâches de rangement, les procédures et les tâches de dénombrement et prévision ont été respectivement étudiées pour la version (a) et pour la version (b) de l'épreuve de construction des cartes.

Les tableaux $I._3$ et II (§.3, p. 26) sur les procédures et $I._4$ sur les rangements, qui portent sur les mêmes sujets, mettent en évidence l'interaction entre les tâches et le rôle des dimensions.

Les contraintes sont différentes sur les deux tâches : il est plus difficile de coordonner au cours d'une procédure un double balayage de chaque dimension, il est assez facile, une fois le matériel construit, d'effectuer un double rangement (il n'y a pas besoin d'anticipation), cela se retrouve dans l'usage respectif des 2 dimensions.

Pour les rangements, lorsque la forme cesse d'être le seul critère de rangements, entre le CE1 et le CE2 majoritairement, c'est au bénéfice de la possibilité d'utilisation successive des deux dimensions (rangements doubles), alors que pour les balayages on observe une situation particulièr au CE2 où il y a presque autant de balayages "couleur" que de balayages "formes".

La dominance de la forme apparaît également dans les tâches de prévision et de dénombrement de l'expérience cartes-b, et pour les sujets de cette expérience le statut de cette dominance n'est également pas le même selon la tâche.

En ce qui concerne les dénombrements "en aveugle" ils sont mieux réussis pour la forme ("combien de carrés"..) que pour la couleur au CP, CE1 et CE2 et également bien réussis (à plus de 80 %) en CM1 alors que les prévisions spontanées sont peu nombreuses (même en CM1); il s'y manifeste la même meilleure performance pour la prévision du nombre de cartes d'une forme nouvelle.

L'évolution des rapports interdimensionnels dans cette réalisation de C x F, telle qu'elle apparaît au travers des procédures et de diverses tâch sur le matériel, fait apparaître :

- un rôle privilégié de la forme (1) (pour les âges étudiés, de CP à CM1) qui reste le "guide" des procédures lorsque le déroulement temporel condui presque nécessairement à une asymétrie de traitement des 2 dimensions ;

- un changement complexe entre le CE1 et le CE2 où la couleur peut jouer u rôle directeur des procédures et être un critère utilisé pour des rangemen cependant cela ne se traduit pas dans les réussites d'ensemble pour les tâ numériques ;

---

(1) Ce privilège, observé dans nos tâches de construction, a été constaté, pour des enfants plus jeunes par d'autres auteurs, (Le Bonniec, 1972). Il n'est cependant pas général.

- en CM1 la forme semble continuer à jouer un rôle de contrôle (pour les procédures, à un moindre titre pour l'exhaustivité avec les rangements) cependant que les dénombrements "en aveugle" ne différencient plus les 2 dimensions, alors que la différence persiste pour les prévisions d'adjonction- comme s'il y avait pour cette tâche difficile une sorte de "rémanence" des asymétries précédemment marquées.

Une analyse des procédures et des rangements des plots (spontanés puis suscités) pour des enfants de CE2 à CM2 témoigne de l'existence d'une asymétrie "au bénéfice" de la forme, avec le même phénomène d'équilibre au CE2 (pour les balayages) que celui observé avec le matériel des cartes.

Nous n'avons pas étudié les tâches de dénombrement mais des justifications de l'exhaustivité de leur construction ont été demandées aux enfants et les mises en relation de F x C avec un autre produit F' x C' (dont l'analyse est faite au paragraphe 8) permettent d'autres comparaisons sur les relations interdimensionnelles.

5.2. Rôle des dimensions F et C dans le "produit" F x C réalisé dans les "plots"

Dans la justification de l'exhaustivité l'une des deux dimensions peut être utilisée, ou les deux ; par exemple "J'ai fait toutes les formes" (justification utilisant la forme F), "J'ai fait toutes les formes pour chaque couleur" (justification utilisant F et C).

De même, dans la mise en relation de deux produits représentés par $F_1 \times C_1$ et $F_2 \times C_2$ (à partir d'un certain âge tout au moins) la correspondance peut être déterminée par les rapports des 2 dimensions ou par ceux d'une seule dimension ("la forme va avec la forme").

Peut-on relever une cohérence dans la nature de la dimension utilisée explicitement (verbalement) ou fonctionnellement (dans la propriété de la correspondance effectuée). Pour aborder cette question (liée aux caractères du "modèle implicite" du "produit F x C" pour les sujets) nous avons croisé les réponses aux deux items, pour les 48 sujets CE2 à CM2 (8 à 11 ans en moyenne) de l'expérience "plots".

La répartition des nombres de sujets selon les différents couples de réponses est donné dans le tableau I.5.

TABLEAU I.5

Just. / Bij	∅	inclassable	1 dim.	2 dim.	Σ
échec	1	1	2	0	4
1 dim. ≡ 1 dim. ≢	9	3	3 14	5	34
2 dim.	1	0	3	6	10
Total	11	4	22	11	48

Nous avons croisé de manière analogue les réponses concernant la justification de l'exhaustivité et les propriétés de la négation "spontanée" de l'identité considérée comme identique si les 2 dimensions sont les mêmes si la couleur (ou la forme) sont les mêmes.

Le tableau II.5 donne la répartition (pour les mêmes sujets que J.B.) des nombres de sujets selon les couples de réponses à ces deux questions.

TABLEAU II.5

Just. / Nég	% ∅ ou inclassable	C	F	C et F	Σ
inclassable	2	1	2	0	5
C $\neq$	6	0	1	3	10
F $\neq$	2	2	1	1	6
C et F $\neq$	5	6	9	7	27
	15	9 (22)	13	11	48

Si ces tableaux confirment qu'il n'y a pas équivalence entre les dimensions (pour un même sujet et globalement) et que, donc, l'hypothèse d'un "modèle" symétrique ne peut être retenue pour de très nombreux sujets mais ils indiquent aussi une forte prise en compte des 2 dimensions si on considère un ensemble de questions, avec des variations considérables selon les tâches : ainsi pour la négation et la justification (qui sont deux tâches liées à l'<u>unicité</u> et à l'<u>exhaustivité</u> de la <u>construction du "produit"</u>) 30 sujets sur 48 prennent en compte les 2 dimensions pour au moins l'une des tâches (7 seulement pour les 2), 4 seulement ne prennent systématiquement en compte qu'une dimension ;

Pour les tâches de bijection et de justification il n'y a que 15 sujets prenant en compte les 2 dimensions dans au moins une des tâches (6 pour les 2), alors que 17 sujets ne prennent systématiquement en compte qu'une dimension.

Ces résultats croisés nous conduisent à formuler une hypothèse quant au statut de l'asymétrie des dimensions et quant à la "dimensionnalité" de l'ensemble "F x C". Pour préciser cette hypothèse nous nous appuyerons d'abord sur les remarques suivantes :

1. Dans les tâches concernant la construction, de nombreux sujets ne font intervenir qu'une dimension pour l'une au moins des deux tâches; or selon la tâche on observe une asymétrie différente : davantage de justifications de l'exhaustivité sont données en faisant appel à la forme ("j'ai toutes les formes) qu'à la couleur (13 versus 9), alors que la négation porte davantage sur la couleur (10 versus 6) (on peut ajouter l'indice convergent donné par la répartition des réponses des 4 sujets "exclusivement unidimensionnels" : 3 sur 4 utilisent 1 dimension pour une tâche, l'autre dimension pour l'autre tâche).

2. Dans les réponses croisées "justification/bijection", sur les 17 sujets "unidimensionnels", 14 utilisent des dimensions différentes pour chacune des 2 tâches.

Il nous semble donc que l'on ne peut pas traiter l'unidimensionnalité des réponses en termes de "prégnance" ou de "dominance" d'une dimension par rapport à l'autre mais en terme d'une organisation fonctionnelle, asymétrique de dimensions dont les rapports dans l'objet sont en fait spécifiques (qui ne sont pas nécessairement invariants selon les objets et les situations), comme le confirme l'analyse qui suit du matériel "mouchoirs".

5.3. Rapports interdimensionnels dans la réalisation C x F par le matériel "mouchoirs"

L'analyse faite au paragraphe 4 des réponses numériques montre une intervention des relations entre F et C dans ces tâches de prévision et de dénombrement ; néanmoins les réussites pour le dénombrement d'une couleur se situaient au même niveau que le dénombrement de la couleur pour les cartes (et non celui de la forme, mieux réussi) : c'est davantage une prise en compte de la forme qui paraît alors en question qu'une relation asymétrique attestée.

La tâche de rangement spatial, avec les contraintes introduites, montre à nouveau une dominance de la forme, avec le même phénomène de symétrie d'utilisation de la similitude des formes et des couleurs au CE2 que constaté avec le matériel "cartes" et la reprise du rôle de "contrôle" de la forme en CM1.

L'analyse des prévisions du résultat de l'adjonction d'un nouvel élément, effectuées après des dénombrements effectifs, confirme l'existence d'une évolution qualitative entre le CE1 et le CE2 : en effet les prévisions correctes pour les 2 dimensions passent de 25 % à 75 %... (alors que la forme faisait l'objet d'un échec spontané au CE2).

L'existence de la forme et de la couleur comme "dimensions" cognitives générales nous paraît répondre de ces phénomènes d'inversion des asymétries selon les tâches pour la réalisation "mouchoirs" où la forme peut être traitée comme un motif (éventuellement non pris en compte pour certaines tâches) ou comme une forme (celle des éléments qui servent de motif) ayant des rapports déjà établis par ailleurs avec la dimension-couleur.

Rappelons ici que les termes déjà utilisés pour des motifs comme "à pois", se rapprochent dans leur fonction des adjectifs de couleur et se distinguent du statut nominal des termes désignant les formes.

6 - RELATION ENTRE LA NEGATION ET L'IDENTITE CHEZ L'ENFANT ET LA CONSIGNE D'UNICITE UTILISEE DANS UNE EPREUVE DE CONSTRUCTION

Lorsque la consigne donnée à un sujet au cours d'une tâche contient des termes comme "pareil", "le même", "différent", il convient de pouvoir en repérer la signification pour le sujet. Or l'étude des notions d'identité et leur évolution chez l'enfant a fait l'objet d'un ensemble de recherches.

Nous allons nous référer ici à celles de ces recherches qui font intervenir comme "ensembles expérimentaux" des produits cartésiens, car nous voulons analyser les effets possibles d'une consigne d'unicité dans nos épreuves de construction d'ensembles produits.

Une telle consigne peut être explicitée par des expressions verbales "ne pas faire deux objets pareils" "ne pas faire deux fois le même".. ou être présentée par l'intermédiaire d'un contre-exemple : on construit un modèle d'objet, puis on en fait un deuxième exemplaire qu'on va défaire ou éliminer en montrant le précédent et en explicitant "on l'a déjà fait".

Dans le premier cas le rôle des termes apparaît important : le sujet donne une signification à "pareil", "même" ; dans le second cas, c'est à la situation d'élimination d'un objet (matériel) parmi deux que le sujet doit donner une signification : quelle est la relation inter-objets qui doit déterminer l'élimination d'un élément : est-ce l'existence d'une couleur comme d'une forme commune ou des deux à la fois.

Dans les deux cas ce qui est en jeu est bien une signification de l'identité ou plus largement des concepts liés de semblables, différents, identiques, voisins...

Nous avons en effet bien constaté que les deux modes de présentation de la consigne d'unicité induisaient les mêmes types d'arrêts au cours de la construction : soit construction d'objets différant entre eux à la fois pour les deux dimensions, soit construction d'objets différant selon une dimension particulière. Dans ces deux cas, l'arrêt a lieu après la construction d'un petit nombre d'éléments, ce qui distingue très nettement ces situations de l'arrêt d'un enfant qui "ne voit plus quoi faire" (et ne veut pas faire de doubles).

Ces arrêts correspondent à deux types de réponse "pareil" pour l'enfant :

- une réponse de proximité, définie ici par le fait que l'une ou l'autre dimension soit la même ;

- une réponse d'équivalence, se faisant sur un critère de dimension (pareil avoir la même forme, par exemple).

Ils ont par ailleurs des effets sur la procédure de construction et son évolution lorsqu'on peut induire l'enfant à continuer sa construction, après lui avoir fait différencier deux situations : "être identique" et être "seulement pareil", c'est-à-dire après avoir établi une autre signification de la consigne que celle initiale "spontanée" de l'enfant.

L'établissement d'une nouvelle signification peut être obtenu (ou non obtenu) différemment selon les modes de réponses des sujets, liés à leur "conception" de l'identité et de la différence.

Nous pouvons rappeler ici les hypothèses retenues par Lépine (1966) : "de 5 ans à 7-8 les sujets passent d'un mode de réponse relationnel à un mode de réponse conceptuel" (correspondant à une structuration du matériel expérimental où les dimensions interviennent ès qualités). "A 5 ans, le "pareil" est un jugement perceptif analogue à ce que pourrait être un jugement "plus grand que" ou "plus petit que" dans une situation psychologique, mais évidemment plus complexe. A 7-8 ans la réponse "pareil" est le reflet de la constitution de l'objet sur le plan notionnel, tout objet particulier étant élément d'une ou plusieurs classes générales.

Quant aux enfants plus âgés (12;6 ans), nous supposons que chez eux les notions d'identité, de proximité et d'équivalence sont bien différenciées (..) et que le mode de réponse qu'ils manifestent est le résultat de l'interprétation qu'ils donnent de la situation."

On peut donc s'attendre à pouvoir obtenir des constructions allant vers l'exhaustivité en respectant l'unicité pour les enfants les plus âgés, en définissant clairement la tâche, à devoir intervenir sur des enfants de 7-8 ans au cours de leur procédure, pour que l'unicité ne soit pas contradictoire avec l'exhaustivité, et à rencontrer des problèmes importants avec les enfants de 5 ans dans le règlement de ce conflit entre unicité et exhaustivité.

Par ailleurs, les conclusions de D. Lépine induisent à s'attendre à une relation entre négation et "modèle" du produit cartésien : l'expérience rapportée ci-dessous (1), et mise en rapport avec une situation de négation sur une structure différente, a pour objectif principal l'étude de cette relation dans une tâche de construction.

---

(1) Cette expérience a été conduite avec L. Maury (cf. L. Maury, J. Rogalsk 1970), et la seconde avec L. Maury et E. Porro (Cf. L. Maury, J. Rogals E. Porro, 1975) à la suite des travaux de L. Maury sur la négation (L. Maury, 1969).

PRODUIT CARTÉSIEN ET COMPLÉMENT ÉTUDE GÉNÉTIQUE DES CONDUITES OBSERVÉES DANS CES SITUATIONS

par Liliane MAURY et Janine ROGALSKI (1)

INTRODUCTION

Cette expérience commune est le résultat de la confrontation des expériences menées séparément par J. Rogalski sur la construction d'un produit cartésien et L. Maury sur l'acquisition de la notion de complément logique.

Nous avons pensé qu'il pouvait exister une corrélation entre l'évolution des deux opérations que nous avons étudiées séparément :

A) La construction du produit cartésien $F \times C$.

B) Le complément d'une classe définie par la conjonction de deux propriétés *a* et *b*.

(1) Article paru dans l'Année psychologique, 1970, 70, 1, 41-71.

En effet, la complémentation telle qu'elle est définie dans les expériences réalisées précédemment dépend à la fois de la maîtrise de la négation (sans préjuger du sens qu'on peut lui donner) et de la possibilité de mettre en relation deux propriétés. Or, ce second facteur doit être partiellement mis en évidence dans la construction d'un produit cartésien. Inversement, la construction du produit cartésien suppose une comparaison de couples définis par deux descripteurs (F et C) qui fait intervenir l'opération de négation.

En menant les deux études simultanément (avec le même matériel et sur le même échantillon de sujets), nous pouvons essayer de séparer les effets spécifiques de la composition des descripteurs et ceux de la négation et les effets de leur interaction.

Dans les expériences de construction d'un produit cartésien, on part d'un ensemble de formes F et d'un ensemble de couleurs C. Le produit F $\times$ C est l'ensemble de tous les couples (f, c) où f appartient à F et c à C ; c'est-à-dire l'ensemble des objets définis par leur forme et leur couleur qu'il est possible de construire à partir des formes de F et des couleurs de C. Chaque couple (f, c), élément du produit F $\times$ C, ne doit être construit qu'une seule fois. Or deux couples (f, c) et (f', c') sont les mêmes si — et seulement si — $(f = f')$ et $(c = c')$. A chaque nouvel élément à construire il faut donc nier la relation *être le même que*. Ce qui, comme nous l'avons déjà souligné, permet une mise en relation avec la notion de complément.

D'autre part, on peut définir dans les expériences sur le complément, les propriétés de la classe a et b, par :

avoir la valeur A sur un descripteur D_1
avoir la valeur B sur un descripteur D_2.

Le complément d'une classe définie par la conjonction de deux propriétés a et b ainsi définies consiste alors à construire une partie du produit cartésien F $\times$ C (lorsque D_1 est la forme et D_2 la couleur).

Nous allons définir les opérations qu'implique une réponse correcte à chacune des épreuves, en précisant pour le complément les étapes génétiques obtenues dans les expériences précédentes.

A) Construction de F $\times$ C

Les épreuves de construction d'un produit cartésien F $\times$ C, dans nos expériences, doivent satisfaire deux contraintes : l'*exhaustivité* et l'*unicité*.

— *exhaustivité :* tous les couples (f, c) doivent être construits ;
— *unicité :* chaque couple (f, c) ne doit être construit qu'une fois.

L'exhaustivité exige qu'on tienne compte des deux descripteurs, de manière indépendante : toutes les couleurs de C doivent être distribuées sur chacune des formes de F (ou réciproquement).

L'unicité porte sur l'identité des couples : (f, c) et (f', c') sont « les mêmes » si — et seulement si — $(f = f')$ et $(c = c')$. Vérifier que deux couples ne sont pas les mêmes consiste donc à nier la relation « être pareil ».

Il y a un double antagonisme entre les deux exigences d'exhaustivité et d'unicité :

— d'une part, si la relation « être non pareil » est plus contraignante que la non-unicité (par exemple, deux éléments sont différents seulement s'ils diffèrent par la couleur) on observe une construction spontanée d'une partie stricte du produit (construction non exhaustive), spécifique de la relation « être non pareil » (par exemple ne sont construits que les éléments ayant chacun une des couleurs de C) ;
— d'autre part l'exhaustivité peut ne pas être obtenue par une procédure algorithmique de recherche des éléments manquants, qui assure de construire à chaque coup un élément non identique aux précédents. Le sujet peut ainsi construire tout nouvel élément par un « tirage » d'une forme parmi les n formes, et d'une couleur parmi les m couleurs (avec éventuellement une probabilité dépendant de la séquence des éléments déjà construits). Pour les ensembles dont l'effectif est relativement faible (3 ou 4 dans nos expériences), tous les couples peuvent alors être construits. Mais cette procédure n'assure pas que chaque couple ne figure qu'une seule fois, le sujet peut construire des doubles.

B) Complémentation

Une réponse correcte à la négation de la conjonction de deux propriétés a et b consiste à donner :

1) Les éléments qui n'ont pas la valeur A sur le premier descripteur et pas la valeur B sur le second ;
2) Les éléments qui ont la valeur A sur le premier descripteur mais pas la valeur B sur le second ;
3) Les éléments qui ont la valeur B sur le second descripteur mais pas la valeur A sur le premier.

Les résultats expérimentaux obtenus montrent que l'acquisition de la complémentation passe par les trois étapes suivantes :

I. — *Unidimensionnelle.* Les sujets ne nient que l'une des propriétés *a* ou *b*. Ils donnent, simplement, par exemple, les éléments qui n'ont pas la valeur A.

II. — *Contraire.* Les sujets nient l'une et l'autre propriété simultanément. Ils donnent alors les éléments qui n'ont ni la valeur A ni la valeur B.

III. — *Réponse correcte.*

Dans la suite de l'exposé, nous définirons de manière détaillée chacune des conduites retenues et la place qu'elles occupent dans notre analyse.

Par analogie avec nos travaux antérieurs, nous parlons de produit F × C et de complément d'une classe (*a*, *b*).

PLAN DE L'EXPÉRIENCE

L'expérience comprend deux parties (I et II) :

La première partie porte sur la construction d'un produit cartésien F × C (3 formes et 4 couleurs), la seconde sur la complémentation. Dans chaque partie, nous avons strictement repris les expériences faites séparément, chacune couvre donc un champ plus large que celui qui serait indispensable pour leur comparaison. Nous utilisons ces résultats pour d'autres analyses.

I. — *Produit :*

- *a)* Construction du produit ;
- *b)* Questions numériques d'adjonction :
  - — d'une couleur ;
  - — d'une forme ;
- *c)* Rangement sur un tableau de 3 lignes et 4 colonnes (3 × 4).

II. — *Complément :* construction et justifications.

- *a)* Complément dans un produit 2 × 2 ;
- *b)* Complément dans un produit 3 × 4.

Matériel

On place devant le sujet deux boîtes à compartiments. Dans l'une sont rangés des carrés de papier de couleur différente (bleus, rouges, verts, jaunes), une couleur par compartiment ; dans l'autre, des enveloppes de plastique transparent, comportant des formes différentes (carrés, étoiles, pois), une forme par compartiment. Le sujet doit construire des « mouchoirs ». Un mouchoir est constitué d'une enveloppe de plastique et d'un fond de couleur.

Ex. : *mouchoir* « *rouge avec des étoiles* ».

Consignes

I. — *Produit*

a) *Construction.* — Après avoir décrit le matériel, l'expérimentateur demande au sujet de construire avec ce matériel « tous les mouchoirs qu'il peut faire, sans faire deux fois le même ». Il donne un exemple de mouchoirs identiques (même forme et même couleur) avec une forme et une couleur supplémentaires et précise qu'on ne doit pas faire « deux fois le même, deux pareils, etc. » ; cette consigne est rappelée en cours d'expérience, si nécessaire.

b) *Questions numériques d'adjonction.* — Après que le sujet a construit tous les couples, l'expérimentateur lui pose quelques questions numériques sur les couleurs et sur les formes.

1. « Si je te donne une couleur en plus (orange), combien pourras-tu faire de mouchoirs supplémentaires (en plus) ? »
2. « Combien as-tu fait de mouchoirs bleus, rouges, etc. ? »

   Le sujet doit répondre sans regarder ce qu'il a fait, puis il vérifie sa réponse en comptant les objets réalisés.
3. Réitération de la question 1 (même s'il y a eu réussite).

On procède de même avec les formes : « Si je te donne des plastiques avec des fleurs, combien... »

c) *Rangement.* — On donne au sujet un tableau à douze cases (quatre lignes et trois colonnes) sur lequel il doit ranger tous les mouchoirs, un mouchoir par case.

II. — *Complément*

a) 2 × 2.

On donne deux tas de cartons de couleurs (rouges et bleus) et deux tas d'enveloppes de plastique (à pois et avec des étoiles). La consigne de complémentation est la suivante :

« Je ne veux pas de mouchoirs « rouges avec des étoiles », fais-moi, avec ce que tu as sur la table, tous les mouchoirs que je veux. »

— Après arrêt spontané, l'expérimentateur demande au sujet s'il est sûr d'avoir fait « tous ceux que je veux ». S'il peut en faire d'autres et pourquoi.

— Suivant la réponse initiale, l'expérimentateur propose des exemples ou des contre-exemples du complément. Le sujet doit les refuser ou les accepter en justifiant son choix.

b) On procède de manière identique en partant de quatre couleurs et trois formes.

Sujets

Tous les sujets ont passé l'expérience dans le même ordre — c'est-à-dire phase I, puis II, dans l'ordre indiqué.

Nous avons interrogé 48 sujets de 5;9 à 9;6, répartis en 4 groupes de 12 sujets chacun. Les quatre groupes correspondent à quatre classes (CP, CE_1, CE_2, CM_1) de l'école primaire.

Groupe	I,	âges limites :	5;6 - 6;4,	âge moyen :	6;2
—	II,	—	7;1 - 7;4,	—	7;3
—	III,	—	8;1 - 8;4,	—	8;2
—	IV,	—	9; - 9;6,	—	9;3

ANALYSE DES RÉSULTATS

Comme nous l'avons précédemment noté, nous ne faisons pas une analyse exhaustive dans chaque partie de l'expérience. En particulier, nous n'utilisons pas ici les résultats observés sur le rangement (*c*) dans la première partie, ni ceux qui ont trait au complément dans un produit 2 × 2, dans la deuxième partie.

Les divers types de conduites retenues sont définis soit par rapport au produit, soit par rapport au complément ; nous n'établissons de comparaison qu'entre une conduite relevant du produit et une relevant du complément et jamais entre deux conduites relevant de la même opération.

Pour la première partie de l'expérience, les trois types de conduites retenues sont les suivants :

A) Existence ou non d'arrêt dans la construction du produit

Il nous a paru important de noter si le sujet construisait l'ensemble des couples de manière continue (ce qui ne veut pas dire de manière systématique) ou s'il s'arrêtait après avoir épuisé les trois formes possibles ou les quatre couleurs ou éventuellement après épuisement des deux. Exemple de double arrêt : le sujet construit d'abord trois mouchoirs différant par chacune des dimensions : *carré/rouge*, *étoile/bleu*, *rond/vert* puis s'arrête (après avoir utilisé les trois formes). Sur incitation de l'expérimentateur, il construit un autre mouchoir *étoile/jaune* par exemple et s'arrête à nouveau, ayant utilisé les quatre couleurs. Cette conduite semble plus spécifiquement liée à l'opération de négation qu'au produit lui-même. En effet, le sujet qui s'arrête justifie toujours l'arrêt de la manière suivante : *Si j'en fais un autre, il sera pareil* (sous-entendu « à un mouchoir déjà fait »). On voit donc que dans ce cas pour que deux mouchoirs soient pareils, il suffit qu'ils aient soit la même couleur, soit la même forme et non pas les deux. L'arrêt serait donc lié à la négation de *être pareil*.

Dans les tableaux de résultats, nous avons réparti les sujets, suivant qu'ils ne s'arrêtent pas du tout dans la construction de $F \times C$ ($\sim$ A), ou qu'ils s'arrêtent une ou/et deux fois (A).

U) Existence ou non de doubles dans la construction du produit

Tous les sujets arrivent, avec des incitations plus ou moins nombreuses de l'expérimentateur, à construire tous les couples possibles ; c'est-à-dire à un produit cartésien exhaustif. Mais l'exhaustivité n'implique pas l'unicité et il arrive que des couples existent à plusieurs exemplaires (doubles). Nous ne considérons pas que l'exhaustivité du produit est un critère pour l'analyse des résultats (puisque tous les sujets y arrivent plus ou moins difficilement) mais que l'unicité des couples en est un. En particulier, dans le cas où l'unicité n'est pas effective ($\sim$ U), le sujet n'est pas capable d'effectuer une comparaison systématique (suivant les deux dimensions) d'un élément à construire à ceux qu'il a déjà construits.

N) Réponses aux questions numériques d'adjonction

Nous avons réparti les sujets dans trois classes suivant qu'ils répondent correctement aux deux questions d'adjonction (forme et couleur) (N_2), à l'une des deux (N_1), à aucune (N_0). Dans la deuxième classe, nous n'avons pas distingué les sujets qui répondent correctement à la forme de ceux qui répondent correctement à la couleur seulement. Les deux conduites sont simplement considérées comme *unidimensionnelles* (prise en considération d'une seule dimension).

Pour la deuxième partie de l'expérience, nous ne retenons que deux types de conduites que nous allons comparer aux précédents :

D) Distributivité ou non de l'ensemble de couples considérés par le sujet comme complément de (a, b)

Nous disons qu'un sous-ensemble du produit F × C est distributif s'il existe au moins une forme utilisée deux fois (avec deux couleurs différentes) et s'il existe au moins une couleur utilisée deux fois (avec deux formes différentes).

Nous pensons que cette conduite est plus spécifiquement liée à la construction du produit et non à la négation. En effet, la construction d'un ensemble non distributif suppose que le sujet n'est pas capable de faire la combinatoire qui consiste à multiplier chaque f de F par chaque c de C. (Cependant, la distributivité n'implique pas que le sujet soit capable de cette combinatoire.)

J) Justifications données par le sujet et réponses aux contre-exemples

Nous avons retenu trois catégories de justifications qui correspondent au sous-ensemble que le sujet accepte comme complément de (a, b) lorsque l'E lui fournit des exemples et des contre-exemples.

1. *Unidimensionnelle*. — Le sujet accepte comme complément de (a, b) tous les éléments qui ont la couleur a et non la forme b ou inversement tous ceux qui ont la forme b et non la couleur a.

En d'autres termes, la négation porte sur une seule dimension, l'autre étant négligée.

Exemple : si E demande le complément de *bleu à pois*, le sujet accepte tous les mouchoirs « bleus » (non « à pois ») et refuse tous ceux à pois (unidimensionnelle/forme).

Nous n'avons pas séparé, dans notre analyse, l'unidimensionalité forme de l'unidimensionalité couleur.

2. *Contraire*. — Une justification est dite *contraire* lorsque le sujet rejette les éléments de couleur a et les éléments de

forme *b*. Il n'accepte ni les éléments *a*, ni les éléments *b*. La négation semble porter sur l'une et l'autre dimension.

3. *Correcte*. — Un sujet donne une justification correcte lorsqu'il résiste aux contre-exemples.

— Il accepte (dans notre exemple) tous les mouchoirs bleus, pourvu qu'ils ne soient pas « à pois », et les mouchoirs « à pois » s'ils ne sont pas bleus. Les sujets justifient leur choix dans ce sens.

Nous obtenons ainsi cinq rubriques d'analyse (A, U, N, D et J) parmi lesquelles deux relèvent plus spécifiquement de la négation (A et J) et trois plus spécifiquement du produit (U, N et D). Parmi les six tableaux croisés possibles, entre les trois rubriques *produit* et les deux rubriques *négation*, nous n'en avons retenu que 3 qui mettent en jeu la partie I et II de l'expérience (A × D), (J × N) et (J × U).

Nous avons donc trois groupes de tableaux I, II, III. Dans chaque groupe de tableaux figurent l'analyse par classe d'âge et l'analyse globale sur tous les sujets.

Nous faisons à partir des résultats antérieurs l'hypothèse qu'il existe des incompatibilités entre certains comportements dans la construction du produit et certains comportements de complémentation. Nous proposons une interprétation de la nature de ces incompatibilités dans la discussion finale.

Une telle hypothèse purement déterministe n'est pas justifiable de test statistique. D'autre part, nous ne nous posons pas de problème d'approximation (analogue à celui posé par les échelles hiérarchiques de Guttmann), mais nous traitons une incompatibilité comme un cas particulier de dépendance entre deux variables. L'étude du tableau de dépendance nous amène alors non pas à valider une hypothèse *a priori*, mais à faire une conjecture sur la liaison entre ces variables. Le traitement statistique des résultats numériques consiste en un test de l'hypothèse d'indépendance des variables définies, par un χ^2 sur les résultats globaux. Si le test statistique ne permet pas de rejeter l'hypothèse d'indépendance, nous devons alors abandonner l'hypothèse sur l'incompatibilité. Sinon, nous conservons cette hypothèse. Dans ce cas, on recherche dans le tableau la case qui contribue particulièrement à rendre χ^2 significatif. C'est-à-dire la case pour laquelle le terme

$$\frac{\delta_0^2}{n_0}$$

majore les termes correspondants aux autres cases. C'est sur cette case particulière que nous faisons alors porter notre interprétation.

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

TABLEAUX I

(A × D)

Répartition des sujets en A/~ A et D/~ D

I	D	~ D	
A	3	8	11
~ A	1	0	1
	4	8	12

II	D	~ D	
A	5	3	8
~ A	4	0	4
	9	3	12

III	D	~ D	
A	6	3	9
~ A	1	2	3
	7	5	12

IV	D	~ D	
A	6	1	7
~ A	5	0	5
	11	1	12

Total	D	~ D	
A	20	15	35
~ A	11	2	13
	31	17	48

On remarque que le nombre de réponses distributives croît entre les groupes I et II d'une part, d'autre part entre les groupes III et IV (il décroît entre les groupes II et III). Simultanément, le nombre d'arrêts dans la construction décroît, il reste toutefois important (7 sujets à 9;6).

Le groupe III marque une régression par rapport au groupe précédent : le nombre de constructions avec arrêt y est plus important, et le nombre de réponses distributives moins important.

Le tableau I' suivant est celui des carrés fournis par chaque case du tableau des résultats globaux dans le calcul du χ^2 de dépendance.

TABLEAU I'

	D	~ D
A	0,34	0,64
~ A	0,95	1,6

$\chi^2 = 3,53$
$d_L = 1$
$.05 < p < .10$

Nous rejetons l'hypothèse d'indépendance entre *arrêt* et *distributivité.*

D'autre part, le plus grand carré (1,6) correspond au faible effectif des réponses *non A et non D.* Nous interprétons ce résultat comme une *incompatibilité entre l'absence d'arrêt* (dans la construction du produit) *et une réponse non distributive dans le complément.*

Nous rejetons l'hypothèse d'indépendance entre les justifications et les réponses numériques.

Nous interprétons la forte contribution (3,68) au χ^2 du faible effectif de la case (Ju, N_2) comme une *incompatibilité entre une réponse correcte aux deux questions numériques d'adjonction et une justification unidimensionnelle au complément.* Cette incompatibilité se remarque sur chacun des quatre tableaux sauf dans le groupe IV où il y a un sujet qui se classe de manière « aberrante ».

L'évolution entre les différentes conduites et entre les quatre groupes semble plus complexe que dans les tableaux I et III. Nous les étudierons de manière plus détaillée dans la discussion en comparant les courbes d'évolution pour chacune d'elles.

Remarquons néanmoins que les sujets du groupe III (8;2) qui répondent correctement à l'adjonction d'un élément pour chacune des deux dimensions dans le produit, répondent en *contraire* dans le complément, alors que ceux du groupe IV (9;6) qui donnent dans le produit la même réponse correcte, répondent *correctement* au complément.

TABLEAUX II

(J × N)

Répartition des sujets suivant leurs réponses aux questions numériques d'adjonction (ø, 1, 2) et leurs justifications au complément

I	*Unid.*	*Contr.*	+	
ø	3	1	2	6
1	2	3	1	6
2	0	0	0	0
	5	4	3	12

II	*Unid.*	*Contr.*	+	
ø	2	0	1	3
1	3	2	1	6
2	0	2	1	3
	5	4	3	12

III	*Unid.*	*Contr.*	+	
ø	0	1	1	2
1	1	0	1	2
2	0	7	1	8
	1	8	3	12

IV	*Unid.*	*Contr.*	+	
ø	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	1	2	8	11
	1	2	9	12

Ensemble des 4 gr. Total	*Unid.*	*Contr.*	+	
ø	5	2	4	11
1	6	5	4	15
2	1	11	10	22
	12	18	18	48

TABLEAU II'

(Même construction que I')

N \ J	*Unid.*	*Contr.*	+
∅	1,75	1	0
1	1,39	0,06	0,46
2	3,68	0,74	0,27

$\chi^2 = 9{,}36$
$d_L = 4$
$.05 < p < .10$

TABLEAUX III

(J × U)

Répartition des sujets suivant U et ~ U
et suivant leurs justifications dans le complément
(unid., contr., correctes)

I	*Unid.*	*Contr.*	+	
U	2	1	2	5
~ U	3	3	1	7
	5	4	3	12

II	*Unid.*	*Contr.*	+	
U	3	3	3	9
~ U	2	1	0	3
	5	4	3	12

III	*Unid.*	*Contr.*	+	
U	0	6	3	9
~ U	1	2	0	3
	1	8	3	12

IV	*Unid.*	*Contr.*	+	
U	1	1	9	11
~ U	0	1	0	1
	1	2	9	12

Total	*Unid.*	*Contr.*	+	
U	6	11	17	34
~ U	6	7	1	14
	12	18	18	48

TABLEAU III'

(Construit de façon analogue aux tableaux I' et II')

	Unid.	*Contr.*	+
U	0,73	0,24	1,43
~ U	1,80	0,58	3,58

$\chi^2 = 8{,}23$
$d_L = 2$
$.02 < p < .01$

Nous rejetons l'hypothèse d'indépendance des variables « unicité » et « justification », et nous interprétons le fort carré (3,58), dû au faible effectif de la case *non-unicité - justification correcte*, comme une *incompatibilité entre ces deux réponses.*

CONCLUSION ET DISCUSSION

Nous avons analysé de trois manières différentes la corrélation entre la construction du produit cartésien F × C et la complémentation d'une classe définie par la conjonction de deux propriétés (a, b). Les trois types d'analyse nous montrent que, quel que soit l'âge des sujets, il n'y a pas indépendance entre ces deux opérations.

Nous obtenons des résultats globaux qui montrent des ncompatibilités entre un type de réponse dans le produit et un type de réponse dans le complément.

D'autre part, nous obtenons des résultats locaux, spécifiques d'un âge donné, et qui permettent de faire des hypothèses précises sur l'évolution de chacune des opérations et sur leurs dépendances à un âge donné.

Nous résumons, tout d'abord, les relations d'incompatibilité entre certaines conduites observées respectivement dans le complément et le produit :

1. Il existe une incompatibilité dans la construction du produit entre l'arrêt et la distributivité (tableaux I). En d'autres termes, on ne peut à la fois construire un sous-ensemble distributif du produit F × C dans la partie II de l'expérience et s'arrêter, dans la partie I, après épuisement de l'une ou/et de l'autre dimension.
2. De même, il est incompatible de répondre correctement aux deux questions numériques d'adjonction (portant sur la

forme et sur la couleur) et de donner une justification « unidimensionnelle » dans le complément (tableaux II). Ces incompatibilités, observées sur l'ensemble des sujets, se retrouvent dans chacun des groupes d'âge, à une exception près (tableaux I, groupe III).

3. Enfin, il est incompatible de justifier correctement le complément de (a, b) et de construire le produit F $\times$ C avec des doubles (tableaux III).

Nous allons maintenant proposer une interprétation de certaines de ces relations d'incompatibilité en fonction de variables hypothétiques liées au produit telles que les notions de *dépendance/indépendance des dimensions* et *unidimensionalité/bidimensionalité.*

On dira que les dimensions sont « indépendantes » quand, par exemple, les couleurs associées à une forme f_2 sont indépendantes de celles qui ont été associées à une forme f_1 (même si toutes les couleurs ne sont pas utilisées pour chaque forme). Au contraire, elles sont « dépendantes » lorsque le sujet associe systématiquement à deux formes différentes deux couleurs différentes (le sujet réalise alors un « ensemble pivot », cf. J. Rogalski). Une construction distributive implique l'indépendance des dimensions et réciproquement l'indépendance implique la distributivité dans la construction, d'après les définitions données.

D'autre part, lorsqu'il n'y a pas « arrêt » dans la construction, c'est que les dimensions sont indépendantes. Mais il peut y avoir « arrêt » lorsque les dimensions sont indépendantes, par exemple si la relation « être pareil » n'est pas l'identité (cf. Lépine, 1966) ou si la négation de cette relation n'est pas correcte. On pourrait s'attendre, dans le second cas, à obtenir une justification *contraire* au complément. La vérification de cette hypothèse nécessiterait une expérience, effectuée avec notre matériel, portant spécifiquement sur la relation *être pareil.*

La variable hypothétique dépendance/indépendance rend ainsi compte de l'incompatibilité (1) : arrêt - distributivité.

La notion de bidimensionalité et unidimensionalité est liée à la possibilité d'utiliser de manière symétrique les deux dimensions dans des situations expérimentales. La bidimensionalité se traduit dans le complément, par la donnée de justifications en *contraire* ou *correctes.*

D'autre part, dans la construction du produit, les réponses correctes aux deux questions numériques d'adjonction impliquent la bidimensionalité ; celle-ci ne suffit cependant pas à entraîner une réponse correcte aux deux questions. En effet, une utilisation symétrique des deux dimensions n'implique pas que cette utilisation soit correcte.

La variable hypothétique unidimensionalité/bidimensionalité rend compte de l'incompatibilité (2) : réponses numériques d'adjonction correctes et justifications *unidimensionnelles.*

La relation d'incompatibilité (3) existant entre la justification *correcte* au complément et la construction du produit avec des doubles est plus délicate à interpréter, dans la mesure où les deux variables hypothétiques (indépendance et bidimensionalité) interviennent.

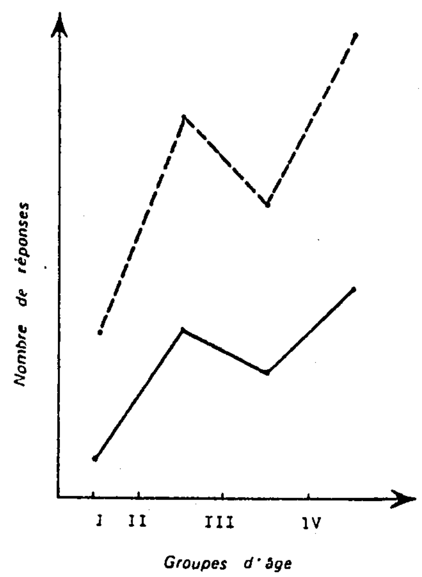


Fig. 1. — Evolution en fonction de l'âge des conduites distributives (D : ---) dans la complémentation et de la construction sans arrêt (~ A : ——) du produit.

En effet, la justification correcte implique à la fois la bidimensionalité (cf. 2) et l'indépendance des dimensions (cf. 1).

De plus, l'existence de doubles suppose que le sujet n'a pas d'algorithme de recherche des éléments manquants (cf. opérations construction du produit).

Nous pensons que l'existence d'un tel algorithme est intimement liée à l'indépendance et à la bidimensionalité.

Lorsqu'il y a justification correcte au complément, il doit y avoir algorithme de recherche donc unicité dans la construction du produit.

Toutefois, l'unicité peut exister sans algorithme de recherche : si la construction de tout élément s'accompagne de sa comparaison aux précédents.

L'interprétation de l'incompatibilité (3) entre J + et ~ U repose essentiellement sur l'hypothèse que la bidimensionalité et l'indépendance impliquent, au niveau de la stratégie de construction, l'existence d'un algorithme de recherche.

Génétiquement, on remarque qu'il n'y a pas une évolution parallèle des conduites relevant du produit ni de celles qui sont plus spécifiquement liées au complément. Par exemple, on remarque que l'unicité dans le produit n'évolue pas de la même manière que les réponses aux questions numériques d'adjonction. De même, dans le complément, la distributivité ne croît plus

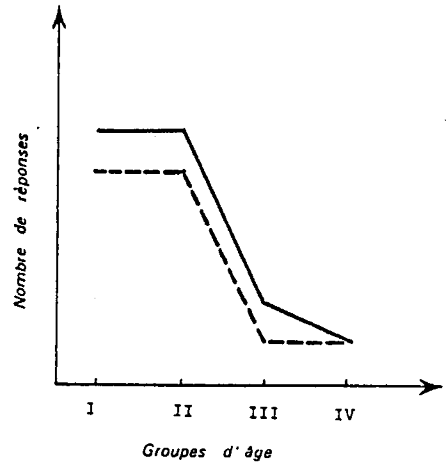


Fig. 2. — Evolution en fonction de l'âge des justifications unidimensionnelles (Ju : – – –) dans la complémentation et des réponses à une seule question d'adjonction numérique (Nu : ——) dans le produit.

de la même manière que les justifications correctes. En revanche, et c'est précisément le but de notre étude, nous voyons des conduites propres à la construction du produit croître dans le même sens que des conduites propres à la complémentation.

— La distributivité et l'absence d'arrêt (cf. fig. 1) évoluent dans le même sens. On retrouve en particulier sur l'une et l'autre courbe une régression entre les groupes II et III (entre 7 et 8 ans).

— Les justifications du type *unidimensionnel* de même que les réponses correctes à une seule question d'adjonction évoluent parallèlement. Les courbes (fig. 2) sont confondues (ceci n'implique pas que ce sont les mêmes sujets qui donnent les mêmes réponses aux deux opérations produit et complément). Ces réponses de type unidimensionnel disparaissent dès le groupe III (10 % des sujets dès 8 ans).

— Inversement, on remarque (fig. 3) que les réponses correctes aux deux questions d'adjonction n'évoluent pas de la même manière que les justifications dans le complément. En particulier, la réussite à l'adjonction précède d'une année la justification correcte au complément : pour l'adjonction, on passe d'un pourcentage de réponses correctes de 25 % à 7 ans à un pourcentage de 75 % à 8 ans. On observe ce même passage pour les justifications correctes au complément, mais entre 8

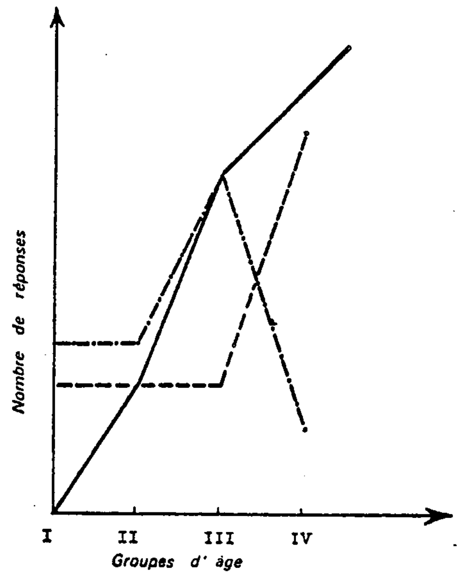


Fig. 3
Evolution
en fonction de l'âge
1) Des justifications contraires (J. contr. —·—·—·) ;
2) Des justifications correctes (J. + : – –) dans la complémentation et des réponses correctes aux deux questions d'adjonction numérique (N + : ——) dans le produit.

et 9 ans cette fois. Sur 8 sujets du groupe III (8;2) qui répondent correctement aux questions numériques, 7 justifient le complément en *contraire*. Alors que dans le groupe IV (9;3), sur 11 sujets qui répondent correctement aux questions numériques, 8 justifient le complément correctement et 2 seulement en *contraire*.

On peut penser qu'il existe deux phases d'évolution : l'une liée au produit, l'autre au complément. Une première étape entre 6 et 8 ans consiste à passer de l' « unidimensionalité » à la « bidimensionalité ». La négation porte alors sur une dimension (justification *unidimensionnelle* du complément), puis sur les deux dimensions (8;2) (justification *contraire*). L'autre étape, qui se situe vers 9 ans, est caractérisée par le fait que la négation ne porte plus sur l'une des deux dimensions ou les deux mais sur le produit. La réussite à la complémentation implique donc qu'on décompose les deux dimensions en jeu, qu'on les multiplie et qu'on applique la négation au résultat de cette multiplication, c'est-à-dire sur le produit.

6.2. La comparaison des réponses des enfants de 6 à 10 ans dans les tâches de construction et de complément pour F X C nous a permis d'avancer des hypothèses assez précises sur le rapport entre produit cartésien et négation conjonctive, et apporte une réponse au moins partielle à la signification de la consigne d'unicité.

La mise en relation entre les conduites de complémentation observées dans notre expérience et les résultats obtenus par L. Maury sur la négation conjonctive (Maury, 1969), nous a conduit par ailleurs à poser à propos de la négation conjonctive le problème du statut "hétérogène"-"dimensionnel" - ou "homogène" des propriétés sur lesquelles porte la négation.

6.2.1. Les conduites rattachées à l'indépendance des dimensions (absence d'arrêt dans la construction du produit, distributivité d'une dimension par rapport à l'autre dans la négation) évoluent parallèlement (fig. 1) mais avec un très net décalage en faveur de la distributivité. Il semble bien que pour une partie des enfants qui utilisent l'indépendance des dimensions, la consigne "ne pas faire 2 fois la même", "pas deux pareils" semble retraduite d'abord en différence absolue, pour chaque dimension. Cela nous a amené pour les dernières expériences sur le produit cartésien "homogène" à modifier la consigne pour intervenir sur l'unicité seulement lorsqu'un double était construit.

6.2.2. La possibilité pour les enfants de faire porter la négation à la fois sur les deux propriétés semble étroitement liée à l'appropriation de la bidimensionnalité - que la réponse soit une négation "en contraire" ou une négation correcte. De ce point de vue, les expériences de L. Maury (Maury, 1969) ont montré l'apparition vers 8 ans d'une conduite dominante de négation en contraire. Or les propriétés utilisées dans ces expériences étaient du type "avoir la valeur A sur un descripteur D1, avoir la valeur B sur un descripteur D2" ; si ces descripteurs avaient pour les enfants un statut de "dimensions", la négation effectuée pouvait avoir les caractères observés ici.

Une question se pose : cette réponse en "contraire" est-elle l'effet d'une coordination inversée entre négation sur chaque dimension et produit des dimensions ou bien est-elle une réponse qui a un domaine de validité plus grand, s'appliquant à d'autres relations, en particulier plus "homogènes".

6.2.3. Analyse d'une expérience de négation conjonctive "homogène"

Une expérience a été conduite avec L. Maury et E. Porro (Maury, Porro, Rogalski, 1974-1975) pour analyser les conduites d'enfants de 7 à 10 ans dans des tâches de négation conjonctive homogène, hors de tout cadre de produit de dimensions ou de descripteurs. Les propriétés utilisées étaient l'appartenance à deux sous-ensembles d'un ensemble fini de nombres ou de dessins non significatifs (fig. 5 ci-dessous pour le dessin)
"P" :"être sur D1", "Q" "être sur D2" ; il faut donner les "éléments" de R qui ne sont pas sur D1 et sur D2 à la fois.

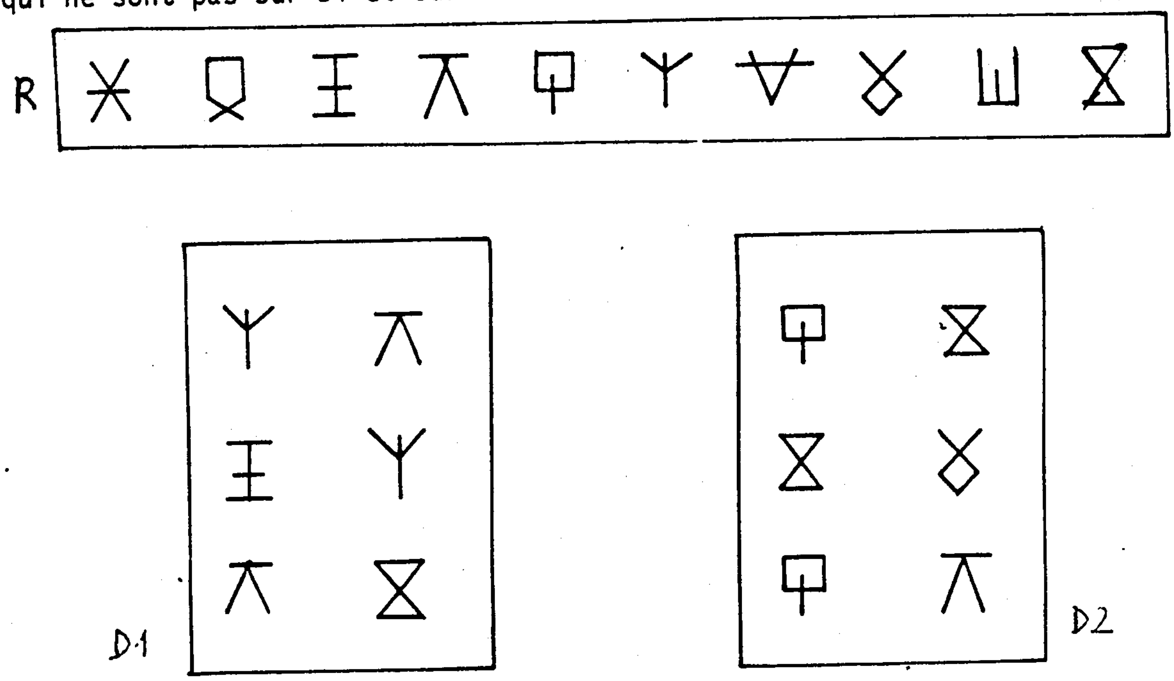


Figure 5

3.1. Les résultats ont mis en évidence une interaction des opérations de négation avec l'usage d'un référentiel ; pour un petit nombre (8) de dessins non significatifs la plupart des enfants n'utilisent pas le référentiel fourni (1) : cela exclut l'apparition de réponses en "contraire". Systématiquement près de 60 % des enfants qui utilisent le référentiel donnent comme première réponse spontanée une réponse en contraire.

3.2. La nature des éléments fournis comme réponse et leur ordre, montre d'une part que les enfants ne testent pratiquement jamais la propriété "P et Q" sur le référentiel mais que - dès 8 ans - ils organisent leur réponses en classes (P et $\overline{Q}$), ($\overline{P}$ et Q), ($\overline{P}$ et $\overline{Q}$) (toutes présentes ou non), et d'autre part qu'il n'y a pratiquement aucune réponse unidimensionnelle ($\overline{P}$ et Q) seul, ou (P et $\overline{Q}$) seul.

3.3. Dans la situation permettant le plus fort usage du référentiel (10 dessins) on observe une évolution des réponses qui rejoint partiellement celle observée pour le complément dans un produit de dimensions :

- avant 8 ans, les réponses majoritaires sont de type (P et $\overline{Q}$) U ($\overline{P}$ et Q) et ne comportent pas d'éléments de la classe ($\overline{P}$ et $\overline{Q}$) (67 % des réponses en CE1) ;

- après 8 ans la dominante est inverse : 67 % de réponses correctes ou en contraire en CE2, 84 % en CM1.

3.4. Le découpage initial en 3 groupes de l'ensemble des sujets a été fait selon les classes (CE1, CE2, CM1) avec des enfants à l'âge moyen de la classe à l'époque de l'expérience ; cela a donné des âges moyens autour de 7;6, 8;6 et 9;6 ans un peu plus élevés que dans l'expérience précédente

---

(1) Lorsque le référentiel fourni dans la cartouche R (figure 5) comporte un grand nombre d'éléments par rapport à ceux appartenant sur les 2 cartes D1 et D2, ou lorsque les éléments sont significatifs (chiffres ou couleurs) il est davantage utilisé.

L'évolution selon ces groupes de la réponse en "contraire" ne semblait pas la faire apparaître comme une "étape" particulière à la différence des autres expériences sur le produit, ce qui contrastait avec l'observation notée ci-dessus (en 3.3.). Effet de contenu ? ou effet de découpage de groupes d'âge ? La considération des réponses en "contraire" selon l'âge (sans regroupement important) nous a montré une répartition fortement centrée autour de 8 ans. Nous avons alors complété les groupes avec des sujets "plus jeunes" pour obtenir en CE1, CE2, CM1 une répartition plus centrée autour de 7, 8 et 9 ans. La réponse en "contraire" est alors apparue comme caractéristique du groupe "8 ans" avec 80 % des réponses.

6.4. En conclusion, l'évolution des réponses sur la négation conjonctive semble bien avoir un large domaine de validité :

- avant 8 ans, la négation concerne l'une ou l'autre des deux propriétés (dont la conjonction est niée), en relation avec l'unidimensionalité des opérations sur le produit lorsque les propriétés sont des valeurs sur des dimensions. Dans le cas du produit de dimensions, l'une d'elle a un statut spécifique et la négation ne porte que sur elle ; ce n'est pas le cas lorsque les propriétés sont "homogènes" sans relation avec un produit cartésien ;

- à 8 ans une étape particulière se marque par la coordination des deux négations "unidimensionnelles" sous forme d'une négation en "contraire", (on nie simultanément l'une et l'autre des propriétés) qui coïncide pour le complément dans le produit cartésien avec l'effectuation de la négation avant l'opération de produit ;

- à 9 ans la coordination des deux négations est correcte et pour le produit l'opération "multiplicative" précède la complémentation.

Le stade particulier de la négation en "contraire" semble donc avoir un large domaine de validité et coïncider (dans le temps du développement cognitif sinon dans ses causes) avec la constitution de la bidimensionalité

7.1. Construction du produit homogène C x C : matériel "maisons" (a et b)

Rappelons que l'objectif essentiel sur l'étude de cette construction (avec épreuve de réalisation de l'adjonction) était la comparaison entre produit hétérogène (C x F) et produit homogène.

La tâche de construction de C x C a donc toujours été passée dans la même expérience que la tâche de construction de C x F. Une première version a correspond à l'ordre de passation : C x F puis C x C ; elle a également été utilisée pour explorer l'effet du nombre d'éléments de C. Une partie des sujets a travaillé avec 3 éléments (d'où (C x C) = 9), l'autre avec 4 (d'où (C x C) = 16). Selon que l'on considère ou non les "unicolores" le cardinal de C x C est plus proche de celui de C x F (12) avec 3 éléments pour C (intégration des unicolores dans la comparaison) ou avec 4 éléments (considération des 12 bicolores..). Une première comparaison va donc concerner cet effet du cardinal de C dans l'épreuve "maisons"-a.

7.1.1. Epreuve "maisons-a". Effet du cardinal de C

En CP presque tous les sujets travaillent avec C3 (9 : C3, 1 C4)

En CE1	5 sujets travaillent avec	C3
	7 sujets "	C4
En CE2	5 sujets travaillent avec	C3
	5 sujets "	C4
En CM1	9 sujets travaillent avec	C3
	5 sujets "	C4
En CM2	4 sujets travaillent avec	C3
	10 sujets travaillent avec	C4.

Le tableau I.7 suivant donne le nombre de sujets effectuant une construction, ou une adjonction, en respectant l'exhaustivité et l'unicité :

TABLEAU I.7

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Construction	1	1	2	7	9
Adjonction	3	2	2	10	8
Nombre	10	12	10	14	14

Le tableau II.7 donne les résultats analogues pour la construction de $C_3 \times C_3$.

TABLEAU II.7

	CP	CE1	CE2	CM1
Construction	1	1	1	5
Adjonction	3	2	2	8
Nbre sujets	9	5	5	9

Pour la construction, la différence est assez faible : les enfants ont de grandes difficultés à aboutir à une combinatoire complète pour la construction. Pour l'adjonction (où la différence du nombre d'éléments de C x C est faible : 7 contre 9) en CE se sont seulement les enfants qui ont eu à construire 9 maisons qui contrôlent l'adjonction d'un nouvel élément à C.

La distribution des sujets selon le nombre de maisons construites pour l'adjonction donne quelques éléments d'appréciation sur ces différences légères : en CP les sujets font de 2 à 7 maisons, en CE1 la combinatoire donne de 5 à 7 maisons, c'est-à-dire que de nombreux sujets font "presque" toutes les maisons, en CE2 et en CM1 les sujets qui ne font pas toutes les maisons combinent le plus souvent seulement des paires de couleurs.

Si une procédure de construction passe par la combinatoire des paires, complétée ou non par symétrie, quand il y a une règle de contrôle de cette combinatoire, comme "associer à la nouvelle couleur chacune successivement des couleurs antérieures", alors l'adjonction pour C4 ne va pas différer de l'adjonction pour C3. En revanche si cette combinatoire n'est pas soumise à un tel processus de contrôle, la probabilité "d'oublier" un élément croît avec le cardinal de C : on doit donc bien observer un décalage dans l'exhaustivité.

7.1.2. Nous allons étudier brièvement les procédures utilisées par les sujets pour rechercher si des procédures systématiques, permettant un contrôle au moins partiel de l'exhaustivité sont utilisées.

Rappelons que la phase de construction pose le problème de la signification pour les enfants, de la consigne d'"unicité", l'analyse des procédures dans la construction n'est pas très productive : en effet, la contrainte donnée peut conduire à une transformation de la tâche pour le sujet, or si l'objectif qu'il se fixe est différent de la construction de C x C, les procédures qu'il va utiliser ne seront pas déterminées par des règles d'action liées à une représentation de "C x C".

L'adjonction d'un nouvel élément se faisant après un établissement de la signification appropriée de la tâche, l'étude des procédures devient un élément d'investigation des représentations du sujet.

Deux procédures sont en rapport étroit avec l'organisation de C x C, et assurent un contrôle plus ou moins complet de l'exhaustivité de la construction :

- construction systématique des symétriques pour chaque paire d'éléments de C : où (a, b) est associé (b,a) : cette procédure est notée S.

- construction par "coordonnées" :(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3) notée C.

- Res désigne les comportements non classables en S ou C.

La présence de ces procédures dans les différents groupes est donnée dans le tableau III_7. (Les nombres entre parenthèses sont les constructions exhaustives).

TABLEAU III.7

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
S	4 (3)	1 (1)	2 (2)	7 (7)	5 (4)
C	0	1 (1)	0	3 (3)	3 (3)
Res	5	3	3	2	3 (1)
N	9 (3)	5 (2)	5 (2)	12 (10)	11 (8)

(N est le nombre de sujets qui, dans le temps de l'ensemble de l'expérience, ont pu passer la tâche d'adjonction pour C x C).

On vérifie que les procédures assurant l'exhaustivité sont presque exclusivement (1 exception en CM2) l'une de ces deux procédures (la première est liée à l'ensemble des parties de C, donc à certains éléments de $\mathcal{P}$(C), la seconde à C x C).

Les procédures de construction de "symétriques" sont dominantes (parmi les procédures systématiques) et les procédures liées à la structure de produit apparaissent très peu avant le CM (où elles sont toujours très minoritaires).

7.1.3. Les premières analyses effectuées sur les tâches de l'épreuve "maisons-a" nous ont conduit aux choix suivants pour la version b (où la construction des maisons précédait celle des cartes) : de CP à CE2 les enfants travaillent avec 3 valeurs pour C (ce qui permet d'assurer en tout état de cause qu'une plus grande difficulté de C x C par rapport à C x F ne peut être attribuée au cardinal de l'ensemble à produire). En CM1, la plupart des sujets ont 4 maisons à construire, dans la mesure où l'existence massive de procédures "S" conduit à une combinatoire très succinte pour C3 x C3 (3 paires à construire pour la construction, aussi bien que pour l'adjonction - compte tenu des unicolores) faisant perdre une partie de la signification de la comparaison des tâches de construction de C x C et C x F, au niveau des procédures.

Les résultats globaux sont les suivants : l'unicité est une contrainte difficile à respecter, le pourcentage des constructions respectant l'unicit passée de 20 % en CP à 60 % en CM1 avec une évolution assez régulière. Lors de la tâche d'adjonction en revanche, l'unicité est bien respectée (de 80 % en CP à 100 % en CM1).

L'exhaustivité de la construction et de l'adjonction est analysable à partir du tableau IV.7 qui donne le nombre de sujets faisant une construction exhaustive stricte , une adjonction stricte ou large.

TABLEAU IV.7

	CP	CE1	CE2	CM1
Construction stricte	1	5	7	5
Adjonction stricte	1	4	7	9
Adjonction large	4	7	8	9

On voit que le statut de l'exhaustivité n'est pas le même en CP ou CE1 et en CE2 ou CM1 car le changement (pour l'adjonction) du critère choisi affecte les résultats dans un cas (CP et CE1) et pas dans l'autre.

7.1.4. L'analyse des procédures utilisées dans la tâche d'adjonction pour l'ensemble des sujets ayant travaillé avec 3 éléments pour C permet de préciser les remarques faites séparément pour les deux versions de la construction de C x C.

Sur les 28 sujets des groupes (a) (qui après la construction de C x F et celle de C_3 x C_3 ont pu aborder l'adjonction) et sur les sujets des groupes (b) qui ont passé la construction de C_3 x C_3 comme première épreuve il n'est pas apparu de différences significatives, nous avons donc regroupé leurs réponses pour les analyses suivantes :

- nombre global de maisons construites lors de l'adjonction,

- présence spontanée de l'unicolore dans l'adjonction,

- construction exclusive de paires (sans aucun symétrique, qu'il y ait ou non l'unicolore),

- construction par symétrie,

- construction par "composante constante" (les cas où les 2 composantes apparaissent sont notés entre parenthèses).

Le tableau $V._7$ donne l'ensemble de ces résultats, (l'indice de complémentarité est le quotient du nombre de maisons construites, par l'ensemble des sujets par le nombre total de maisons à construire) les données en valeurs sont entre crochets, celles en pourcentages sont indiquées en 2ème ligne pour chaque résultat.

TABLEAU V.7

	CP	CE1	CE2	CM1
"Indice de complétude"	[71/112] 65	[80/112] 71	[93/123] 75	[127/133] 95
Présence unicolore	[11/16] 69	[11/16] 69	[12/17] 70	[17/19] 90
Paires exclusives	[7/16] 44	[4/16] 25	[5/17] 29	[2/19] (11)
Construction par symétrie	[2/16] 15	[5/16] 31	[8/17] 46	[9/19] 46
Construction par composante	[5(1)/16] 31 (6)	[5(4)/16] 31 (25)	[4(3)/17] 23 (18)	[7(6)/19] 37 (32)

On peut dégager quelques éléments quant à l'évolution traduite dans ce tableau :

- la complétude de l'ensemble est un indice très grossier d'appréciation : s'il établit un contraste entre le CP et le CM1, son évolution assez régulière ne reflète pas des éléments importants qui opposent les groupes ;

- la distinction des unicolores laisse des traces jusqu'au CM1 ; les 30 % d'"oubli" que l'on observe du CP au CE2 sont en effet un indice majeur, mais une étude de l'intégration des unicolores à l'ensemble de la construction de C x C (dans la version a) montre que au CP et au CE1, même lorsqu'ils sont construits, les unicolores sont peu intégrés à l'ensemble des autres maisons (bicolores) (de 10 à 30 % en CP et CE1 : ils sont construits séparément et rangés à part (non mélangés aux autres) ;

- le caractère de sous-ensemble de $\mathcal{P}$(E) est marqué à la fois par les constructions exclusives de paires et la non-intégration des unicolores : cela concerne près de la moitié des élèves de CP, et encore le quart des élèves de CE ;

- la coexistence dans les mêmes groupes d'âges d'une double représentation liée soit à $\mathcal{P}$(E) soit au produit se traduit par la "concurrence" des procédures systématiques liées à l'une (S) ou à l'autre (C) des représentations

Ces procédures (rares au CP) (5 et 6 %), sont utilisées par la moitié des sujets en CE1, et par une majorité en CE2 et CM1 (près de 80 %), mais les procédures impliquant des règles d'action liée à une représentation de produit sont toujours très minoritaires (30 % en CM1).

°

° °

7.2. Comparaison des constructions et adjonctions pour "C x C" et "F x F"

(Cette expérience a été conduite en collaboration avec Liliane Maury et Elena Porro)

La difficulté spécifique du produit "homogène", telle qu'elle se manifeste dans la construction de E x E par les décalages des réponses exhaustives respectant l'unicité, par rapport à la construction de E x F, pourrait tenir non pas tant aux opérations cognitives nécessaires pour la combinatoi[re] demandée mais aux caractéristiques propres à la dimension "couleur". Elle pourrait tenir aussi, dans nos expériences précédentes, à la difficulté de la signification de "pareil" : l'usage d'une ressemblance globale différent[e] de l'identité aboutissant à une combinatoire incomplète (Lepine, 1967 ; Vurpillot, 1970 ; Maury et Rogalski, 1970).

L'expérience qui suit a été construite pour apporter des éléments de réponses à ces questions. D'une part, elle doit permettre de comparer la construction d'un produit homogène dans le cas des dimensions "couleur" et "forme" ; d'autre part la consigne y est donnée sans présenter de contraint[e] quant à l'identité.

En fonction des résultats expérimentaux précédents, nous y mettons à l'épreuve les hypothèses suivantes :

1. L'évolution des conduites des élèves sera analogue pour les deux types d[e] matériel, et les transferts seront faibles ;

2. Avant 6 ans, les difficultés dues à la notion même d'identité (et non simplement aux termes d'une consigne) seront importantes pour les deux matériels ;

3. L'adjonction d'un élément supplémentaire donnera lieu à des réponses trè[s] proches pour le matériel "forme" et pour le matériel "couleur", dans la mesure où les procédures d'adjonction nous sont apparues plus stables et régulières que celles de la construction elle-même ;

4. Les différences constatées permettront de distinguer ce qui tient aux caractéristiques propres des réalisations matérielles dans les deux dimensions utilisées.

7.2.1. <u>Procédure expérimentale</u>

1) Dimension couleur

On donne au sujet des "maisons" déssinées sur des cartes rectangulaires (5 cm x 7 cm) formées d'un toit triangulaire et d'un fond carré (contigus mais disjoints). Il a par ailleurs des crayons "feutre" de couleur : bleu, rouge et vert et doit colorier indépendamment le toit et le fond des "maisons".

Chaque élément ainsi obtenu est une réalisation de C x C (où C a trois éléments de B, R et J). L'expérimentateur (E) montre un exemple de coloriage (de la ligne du bord) d'une maison avec d'autres couleurs que B, R et J et demande à l'enfant "Tu fais toutes les maisons que tu peux avec ces trois couleurs, en coloriant le toit et le fond".

Si l'enfant réalise un double au cours de l'exécution de la tâche, l'E l'arrête et lui demande si cette maison "n'a pas été déjà faite". Si la réponse est positive, on lui fait désigner la maison identique et on répète la consigne en précisant cette fois : "Tu ne fais pas deux fois la même". Si l'enfant ne repère pas la maison identique, on étale si nécessaire les maisons déjà coloriées et on guide l'enfant dans sa recherche en détaillant chaque maison pour comparer les toits et les fonds.

On procède d'une façon analogue si dans sa recherche du double, l'enfant identifie comme "les mêmes" un couple d'éléments symétriques (Ci, Cj) et (Cj, Ci). On ne laisse pas un enfant réaliser de double sans l'arrêter et on ne passe à la réalisation de l'élément suivant qu'après élimination du double.

Si le sujet s'arrête sans avoir réalisé C x C (de façon exhaustive) on lui demande "Tu as tout fait ou tu peux en faire d'autre ?". S'il dit avoir terminé on lui montre une maison qu'il n'a pas encore faite (1). Quand le sujet a terminé C x C et s'arrête spontanément, l'E lui demande de justifier son arrêt : "Comment tu sais que tu as tout fait ?". Si le sujet ne s'arrête pas spontanément et réalise donc des doubles, on lui suggère qu'il a peut-être terminé ; s'il persévère, on l'arrête après 3 doubles consécutifs.

On passe à l'épreuve d'adjonction : "Je te donne une couleur en plus, la jaune ; tu vas faire toutes les maisons que tu peux faire en plus". L'E donne le "feutre" jaune et intervient dans les mêmes conditions que pour la construction. (2)

2) Dimension "forme"

Le déroulement de l'épreuve est similaire. Les formes sont réalisées par des formes de bois (carré, triangle, demi-cercle, pentagone) emboîtable pour former ce qu'on appellera un "bateau" avec une "voile" (verticale) et un "fond" (horizontal).

---

(1) Ces contre-exemples ont un rôle différent suivant le moment où ils interviennent dans la construction de la série des maisons réalisée. En effet, ils peuvent intervenir par exemple après la réalisation des seuls unicolores : (Ci, Ci) dans ce cas, ils ont pour but de "déclenche la fabrication de bicolores ; inversement, ils peuvent intervenir après la fabrication des seuls éléments bicolores pour déclencher la construc tion d'unicolores.

(2) Cette situation de construction de C x C a donné lieu à la réalisation avec L. Maury d'un film, sous la direction de Raoul Rossi.

7.2.2. Sujets

Ce sont 72 enfants, de 5;3 à 8;10 ans d'une école maternelle et d'une école primaire (CP et CE1), répartis en trois groupes Mat, CP, et CE1 de 24 élèves. Dans chaque groupe, 12 élèves construisent d'abord les "maisons" puis les "bâteaux" (groupe C1 F2), et 12 travaillent dans l'ordre inverse (groupes F1 C2).

7.2.3. Analyse des résultats

Nous avons analysé les réponses des enfants selon l'exhaustivité et l'unicité dans la construction et l'adjonction pour C x C et F x C.

Exhaustivité :

Nous classons comme réponse "exhaustive" la donnée d'au moins 8 éléments sur les 9 ; pour l'adjonction, il faut 6 éléments sur 7. Ces réponses sont notées R.

Unicité :

Nous classons, pour chaque partie de la tâche, les sujets selon trois classes :

U : 0 ou 1 double
I : de 2 à 5 doubles
E : plus de 5 doubles.

L'étude de la répartition des réponses pour l'exhaustivité et l'unicité nous permet :

- d'analyser les effets éventuels de la dimension forme ou couleur (dans la réalisation donnée) sur les conduites des enfants (sur les groupes et sujet par sujet),

- d'analyser l'évolution des réponses et en particulier les procédures utilisées par les enfants pour l'adjonction - procédures qui se sont confirmées plus cohérentes que celles mises en oeuvre dans la construction elle-même.

7.2.3.1. Exhaustivité

Construction

Les tableaux VI.7 et VII.7 donnent les pourcentages de constructions exhaustives pour la réalisation de C x C et F x F, selon les niveaux scolaires et en fonction de l'ordre de passation.

TABLEAU VI.7

Classe / Ordre	Mat	CP	CE1	TOTAL
C1	41	83	66	64
C2	75	66	100	21
Total	58	75	83	42

TABLEAU VII.7

Classe / Ordre	Mat	CP	CE1	TOTAL
F1	59	75	75	69
F2	41	92	92	75
Total F	50	83	83	72

Globalement, il y a peu de différences selon les dimensions couleur et forme aux différents niveaux scolaires. Le fait de passer deux épreuves successives semble améliorer légèrement l'exhaustivité des réponses (C1 comparé à F2 et F1 comparé à C2).

Pour les petits cardinaux choisis dans notre travail, les enfants dès le cours du CP réussissent des constructions exhaustives (dans une situation où ils n'ont pas de possibilité de validation externe à leur procédure) (plus des 3/4 de réponses exhaustives). En maternelle, c'est le cas pour un pourcentage significatif d'enfants.

L'analyse de l'ensemble de leurs productions à la construction de C x C et F x F indique que les procédures des enfants ne sont pas toutes fiables. Le tableau suivant donne la répartition des enfants selon l'ensemble de leurs constructions de C x C et F x F, analysées comme précédemment ("+" dénote une réponse exhaustive pour la dimension considérée en tête de colonne).

<table>
<tr><th>Dimensions F - C</th><th>Mat (N = 24)</th><th>CP (N = 24)</th><th>CE1 (N = 24)</th><th>TOTAL(N = 72)</th></tr>
<tr><td>++</td><td>.38 (9)</td><td>.62 (15)</td><td>.71 (17)</td><td>.57 (41)</td></tr>
<tr><td>+-</td><td rowspan="2">.33 (2)
(6)</td><td rowspan="2">.25 (3)
(3)</td><td rowspan="2">.25 (3)
(3)</td><td>.11 (8)</td></tr>
<tr><td>-+</td><td>.17 (12)</td></tr>
<tr><td>--</td><td>.29 (7)</td><td>.13 (3)</td><td>.04 (1)</td><td>.15 (11)</td></tr>
</table>

TABLEAU VIII.7

Répartition en pourcentage des réponses couplées pour les deux constructions (Entre parenthèses le nombre de sujets).

Le décalage absolu entre les réussites séparées à la construction de C x C ou F x F et les réussites complètes (++) est de 12 points. Cela signifie que pour près du quart des enfants de 5-6 ans, les procédures "gagnantes" ne sont pas fiables, et que c'est le cas pour plus de 15 % des enfants de CP et CE1.

L'étude de l'exhaustivité de l'adjonction, de l'unicité des constructions et adjonction, ainsi que l'analyse des procédures dans l'adjonction éclairera le statut des constructions exhaustives.

Adjonction

Le critère d'exhaustivité de l'adjonction est la construction d'au moins 6 des 7 éléments à construire.

Le tableau IX.7. donne le pourcentage des enfants effectuant une adjonctic exhaustive pour la dimension couleur (C x C) et pour la dimension forme (F x F). Les deux ordres de passation donnent des résultats analogues : nous les avons donc regroupés.

TABLEAU IX.7

dimension \ classe	MAT N = 24	CP N = 24	CE1 N = 24	Total N = 72
F	.38 (9)	.79 (19)	.91 (22)	.70 (50)
C	.58 (14)	.79 (19)	.87 (21)	.75 (54)
Ensemble	.48 (23)	.79 (38)	.89 (43)	.72 (104)

Les résultats sont proches de ceux obtenus pour la construction elle-même, à l'exception de l'adjonction d'une forme, pour les enfants de maternelle. La dimension "forme" pose davantage de problème que la dimension "couleur" pour ces jeunes enfants.

Cette différence spécifique (sur l'ensemble des élèves) aux enfants de maternelle se confirme si on regarde la corrélation des réponses à C x C et F x F (adjonction).

TABLEAU X.7

Pourcentage des couples de réponses exhaustives (+) ou non-exhaustives (-) pour les dimensions couleur et forme selon les classes. (Entre parenthèses le nombre de sujets).

C - F	Mat N = 24	CP N = 24	CE1 N = 24	TOTAL N = 72
++	.25 (6)	.75 (18)	.83 (20)	.61 (44)
+-	.33 (8)	.04 (1)	.04 (1)	.14 (10)
-+	.13 (3)	.12 (3)	.08 (2)	.11 (8)
--	.29 (7)	.08 (2)	.04 (1)	.14 (10)

Les procédures d'adjonction apparaissent plus fiables que celles de construction pour les enfants de CP et CE1 (décalage d'à peine 4 points, à peine 5 % des réponses séparément correctes).

7.2.3.2. Unicité

L'analyse de la capacité des enfants à éviter de faire des "doubles" donne des indications sur le contrôle de leur procédure de construction (pour la construction comme pour l'adjonction d'une nouvelle valeur).

Construction

Les tabl. XI.7 et XII.7donnent la répartition des sujets selon les trois classes :

U : de 0 à 1 double (unicité respectée)

I : de 2 à 5 doubles

E : plus de 5 doubles

respectivement pour C x C et F x F (les deux ordres de passation ont été regroupés).

TABLEAU XI.7

Rép.	Mat (N = 24)	CP (N = 24)	CE1 (N = 24)	TOTAL (N = 72)
U	.08 (2)	.54 (13)	.79 (19)	.47 (34)
I	.38 (9)	.33 (8)	.21 (5)	.31 (22)
E	.54 (13)	.13 (3)	- (0)	.22 (16)

TABLEAU XII.7

Rép.	Mat (N = 24)	CP (N = 24)	CE1 (N = 24)	TOTAL (N = 72)
U	.04 (1)	.25 (6)	.42 (10)	.24 (17)
I	.21 (5)	.54 (13)	.50 (12)	.42 (30)
E	.75 (18)	.21 (5)	.08 (2)	.34 (25)

L'unicité différencie nettement les dimensions forme et couleur (dans leur réalisation matérielle) : tous les enfants éprouvent de plus grandes difficultés à éviter les "bateaux" identiques. Néanmoins, pour les enfants de maternelle (5-6 ans) aucune des deux situations ne leur permet d'éviter complètement les doubles - et plus de la moitié font plus de 5 doubles (y compris pour les"maisons") pour une construction qui, rappelons-le, conduit à seulement 9 éléments distincts.

Par ailleurs, l'unicité différencie les niveaux scolaires; les enfants de CE1 contrôlent beaucoup mieux leur procédure de construction que ceux de CP, même avec la situation des "bâteaux" réalisant F x F.

Adjonction

Les tableaux XIII.7 et XIV.7 sont construits de façon analogue aux tableaux pour l'unicité de l'adjonction.

C x C	Mat (N = 24)	CP (N = 24)	CE1 (N = 24)	TOTAL (N = 72)
U	.29 (7)	.83 (20)	.92 (22)	.69 (50)
I	.67 (16)	.17 (4)	.08 (2)	.29 (21)
E	.04 (1)	- -	- -	.02 (1)

TABLEAU XIII.7

F x F	Mat (N = 24)	CP (N = 24)	CE1 (N = 24)	TOTAL (N = 72)
U	.21 (5)	54 (13)	62 (15)	46 (33)
I	54 (13)	37 (9)	33 (8)	42 (30)
E	25 (6)	8 (2)	5 (1)	12 (9)

TABLEAU XIV.7

Répartition en pourcentage des sujets selon les qualités de leurs réponses quant à l'unicité U, I, E respectivement pour C x C et F x F. (Entre parenthèses le nombre de sujets).

On retrouve des résultats qualitativement semblables à ceux de l'unicité dans la construction : forte évolution entre la maternelle et le CP, difficultés plus grandes de contrôle de la procédure dans le cas des "bâteaux" réalisant F x F.

Mais il apparaît une différence importante entre l'adjonction et la construction : l'unicité est beaucoup mieux respectée pour l'adjonction, quelle que soit la dimension considérée, et pour tous les groupes.

Nous analyserons plus loin cette différence qui ne peut relever des seules différences de cardinaux (respectivement 9 pour la construction et 7 pour l'adjonction) : les réponses de type "U" gardent dans les deux cas essentiellement la même signification. (De plus - dans les deux cas - le nombre de bicolores (ou de couples de formes différentes) est identique : 6 ; c'est une des raisons du choix du cardinal 3 pour les ensembles expérimentaux, C comme F).

°

° °

7.2.3.3. Qualité d'ensemble des réponses

Nous avons analysé jusqu'ici séparément le respect de l'exhaustivité et celui de l'unicité. Nous allons maintenant étudier le caractère à la fois exhaustif et exclusif des procédures des enfants.

Réponses correctes pour la construction

Le tableauXV.7 donne le nombre d'enfants qui font des constructions respectant à la fois l'unicité et l'exhaustivité pour les "maisons" et les "bâteaux" (F) présentés en 1ère épreuve (C1 et F1) ou en seconde épreuve (C2 et F2) :

TABLEAU XV.7

	Mat	CP	CE1	TOTAL
C_1	0	3	8	11
F_2	0	4	8	12
F_1	0	1	2	3
C_2	1	7	12	20

Réponses correctes pour l'adjonction

Le tableau XVI.7 fournit les résultats analogues pour l'adjonction.

TABLEAU XVI.7

	Mat	CP	CE1	TOTAL
C_1	1	9	9	19
F_2	1	7	7	15
F_1	1	5	7	13
C_2	1	8	12	21

Réussites complètes à la construction et à l'adjonction

Le tableau XVII.7 donne le nombre d'enfants des différents niveaux scolaires qui font la construction et l'adjonction en respectant exhaustivité et unicité.

TABLEAU XVII.7

(Entre parenthèses le nombre d'enfants qui réussissent à l'ensemble des deu épreuves F et C)

	Mat	CP	CE1	TOTAL N= 72
C_1	0	2	5	7
		(2)	(3)	
F_2	0	3	4	7
F_1	0	1	2	3
		(1)	(2)	
C_2	0	6	12	18

Commentaires

L'étude séparée des contraintes d'exhaustivité et d'unicité n'avaient fait apparaître que peu d'effets de la succession des deux épreuves et des effets limités de la réalisation matérielle des deux dimensions forme et couleur ; l'analyse des constructions (et à un moindre titre des adjonction respectant la double contrainte est plus riche et témoigne d'une grande complexité des processus en jeu.

On voit à la fois des effets d'une épreuve sur l'autre, de la construct sur l'adjonction, le contrôle des procédures s'améliorant au cours du dérou lement de la séance. Mais il y a une très forte interaction entre les effet apportés lors de la passation même des différentes épreuves et le niveau des enfants (1).

En particulier les progrès que font les enfants de maternelle pour faire moins de doubles (évolution de l'unicité entre la phase de construction et celle d'adjonction) entrent en contradiction (en particulier lorsqu'il s'agit du travail sur les "bâteaux") avec l'objectif d'exhaustivité et le nombre d'éléments à comparer. Céla se conclut par l'échec à des constructions ou à des adjonctions à la fois complètes et sans doubles.

7.2.3.4. Analyse des procédures utiliséées pour l'adjonction

Nous avons recherché les procédures particulières que nous avons appelées systématiques dans la mesure où elles mettaient en oeuvre un même principe observable pour construire plusieurs éléments.

Elles sont de deux types :

- constitution de paires successives d'éléments symétriques : bleu/jaune puis jaune/bleu, rouge/jaune puis jaune/rouge ;

- constitution de la "ligne" puis de la "colonne" (ex. : jaune/bleu ; jaune/rouge jaune/vert puis rouge/jaune ; bleu/jaune ; vert/jaune).

Dans le premier cas, il y a comme invariant la paire (non "orientée") des éléments de C (ou F) utilisés ; dans le second cas, une coordonnée est

(1) Le groupe F_1 C_2 du CE1 apparait non homogène aux autres groupes, en particulier en ce qui concerne les effets de l'adjonction faibles pour C_1 et... négatif pour F_2. L'interaction - conflictuelle - entre exhaustivité et unicité semble s'être très mal réglée pour certains enfants, sans que nous puissions repérer exactement en quoi les hasards de la répartition des enfants entre F_1 C_2 et C_1 F_2 ont, semble-t-il, conduit à des groupes dissemblables.

fixe : l'invariant est la couleur du trait (puis celle du fond) ou l'invers

Avec les petits cardinaux utilisés, pour voir apparaître de telles procédures il faut une tâche dans lesquelles les contraintes ne soient pas trop fortes - et où ces procédures ne s'identifient pas purement et simplement à une inscription dans le temps de la structure produit E x E - condition très forte. L'expérience montre que les situations d'adjonction se prêtent bien à l'apparition de ces procédures observables.

Le tableau XVIII.7 donne le pourcentage des procédures systématiques dans les trois niveaux scolaires, en fonction du matériel.

TABLEAU XVIII.7

(Entre parenthèses, le nombre de sujets)

	Mat (N = 24)	CP (N = 24)	CE1 (N = 24)	TOTAL (N = 72)
C x C	8 (2)	29 (7)	67 (16)	35 (25)
F x F	21 (5)	25 (6)	79 (19)	42 (30)
Dans les 2 épreuves	4 (1)	8 (2)	54 (13)	21 (15)

La différence du matériel expérimental (et des dimensions en jeu : forme et couleur) ne se traduit guère au niveau de l'existence de ces procédures systématiques.

L'évolution de leur importance avec les niveaux scolaires apporte des nouvelles indications : alors que pour l'unicité et l'exhaustivité on obser une différence qualitative entre maternelle et CP c'est entre le CP et le CE1 que se marque un changement qualitatif dans la mise en oeuvre de procédures systématiques d'adjonction (qui passent en moyenne de 27 à 73 %..).

Ces procédures ne garantissent ni l'exhaustivité ni l'unicité - si elles ne sont pas accompagnées d'un contrôle de leur exécution mais elles manifestent la prise en compte de relations internes du produit homogène, dont le domaine de validité comprend des réalisations matérielles très contrastées, à partir de dimensions aussi différentes que la forme et la couleur.

De ce point de vue le passage du CP au CE1 se traduit par l'usage de telles procédures pour les deux épreuves, usage corrélatif pour l'essentiel au grand nombre de ces procédures dès la première épreuve.

7.3 <u>Conclusion</u>

La comparaison des résultats des expériences "maisons" conduites avec des consignes différentes quant à la contrainte d'unicité confirme que la consigne initiale "ne pas faire de doubles", "ne pas faire deux pareils", met en contradiction l'objectif d'exhaustivité et celui d'unicité: il y a un décalage net entre le pourcentage de constructions respectant strictement les deux conditions et celui à un près; il y a également un décalage important entre les réussites à un près pour les deux types de consigne, avec le même matériel (fig 6 ci-dessous).

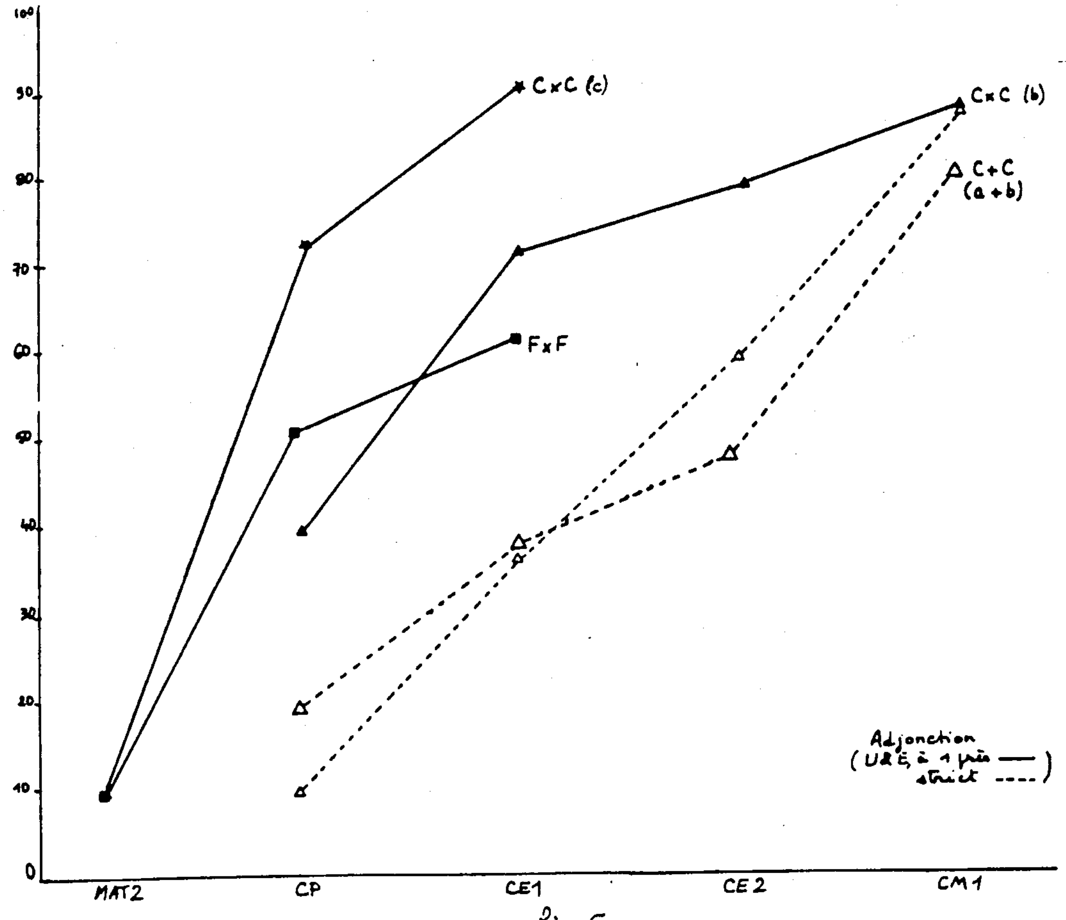
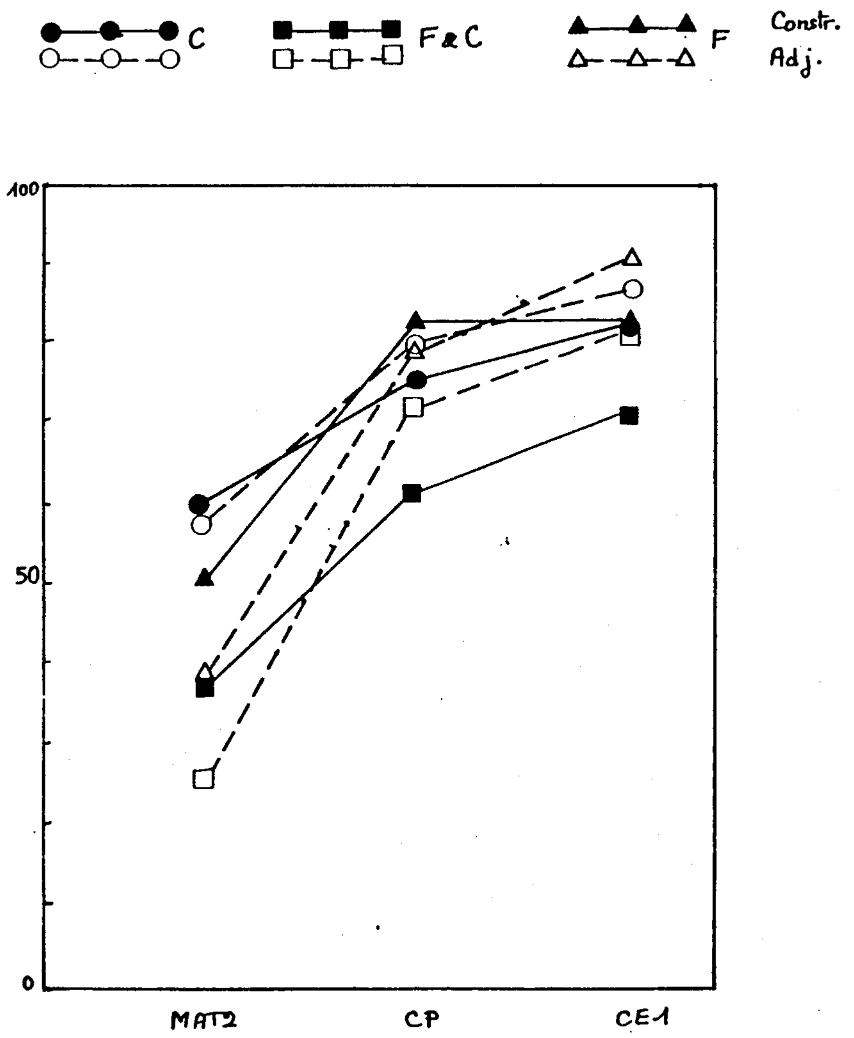


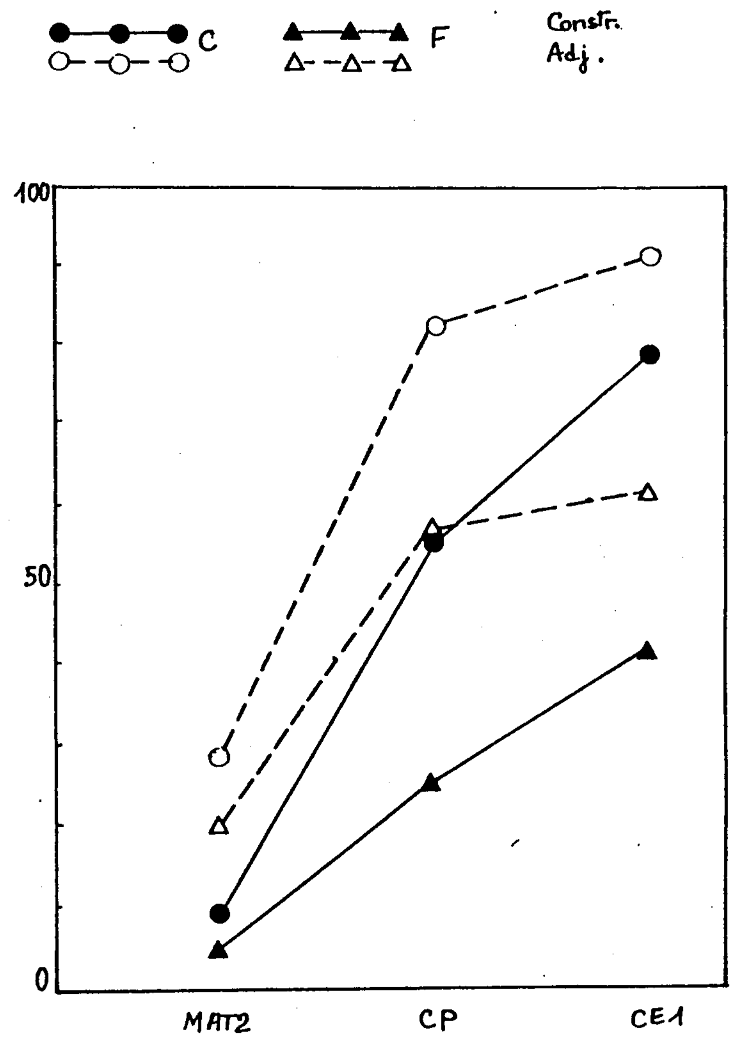
fig. 6

Par ailleurs les conduites des enfants de 5 ans, dans nos tâches de construction de produit homogène, sont conformes aux prédictions faites au paragraphe 6 (relation entre négation et unicité): les jeunes enfants ne peuvent maitrise la double contrainte d'unicité et d'exhaustivité, même lorsque la première intervient au niveau de l'action en cours et non de la formulation d'une consigne verbale initiale.

D'autre part, les caractèristiques des dimensions utilisées pour la construction d'un carré cartésien ExE semblen essentiellement jouer au niveau des procédures de contrôle de l'unicité: celles-ci sont plus ou moins faciles à mettre en oeuvre selon les propriétés perceptives du matériel; en revanche les procédures de construction ne dépendent pas du type de matériel (formes ou couleurs);

Enfin, la nature des procédures qui apparaissent dans la construction de ExE, et surt out dans l'adjonction d'un nouvel élément e à E, diffère qualitativement de celles mises en oeuvre pour la construction de CxF; jusqu'au CM (plus de 9ans) l'ensemble ExE est davantage mis en rapport avec l'ensemble des parties à deux éléments dans $\mathcal{P}(E)$ qu'avec un produit. Le passage à ExE, avec indexation implicite ou explicite de E en E1 et E2 (par exemple: la "couleur du toit" et la "couleur du fond") semble se faire après une opération de "symétrisation" des paires de deux éléments ; cette symétrisation fait sortir le matériel construit d'une représentation dans $\mathcal{P}(E)$, où l'ordre des éléments de E n'est pas pertinent, en distinguant la paire $\{e_1, e_2\}$ du doublet de symétriques (e_1, e_2) et (e_2, e_1). Remarquons que cette symétrisation n'existe que dans le cas du carré cartésien: nous faisons l'hypothèse que pour la construction d'un produit homogène de type $A_1 x A_2$, où A_1 et A_2 seraient des parties disjointes d'un même référentiel, les représentations des enfants se détacheraient plus difficilement des parties à deux éléments de $\mathcal{P}(A)$ et que ces représentations garderaient de ce fait un caractère plus additif que multiplicatif; cela devrait avoir des conséquences quant aux différentes règles d'action que les enfants pourraient mettre en oeuvre sur un matériel de cette nature, les distinguant elles aussi des règles d'action applicables pour le produit; il est raisonnable de supposer que les règles d'action "additives" sont plus facilement opératoires que des règles d'action à caractère "multiplicatif" car elles n'exigent pas de prise en compte simultanée de propriétés ou de relations.


C
F & C
F
Constr.
Adj.
100
50
0
MAT2
CP
CE1
fig. 7


C
F
Constr.
Adj.
100
50
0
MAT2
CP
CE1
fig. 8

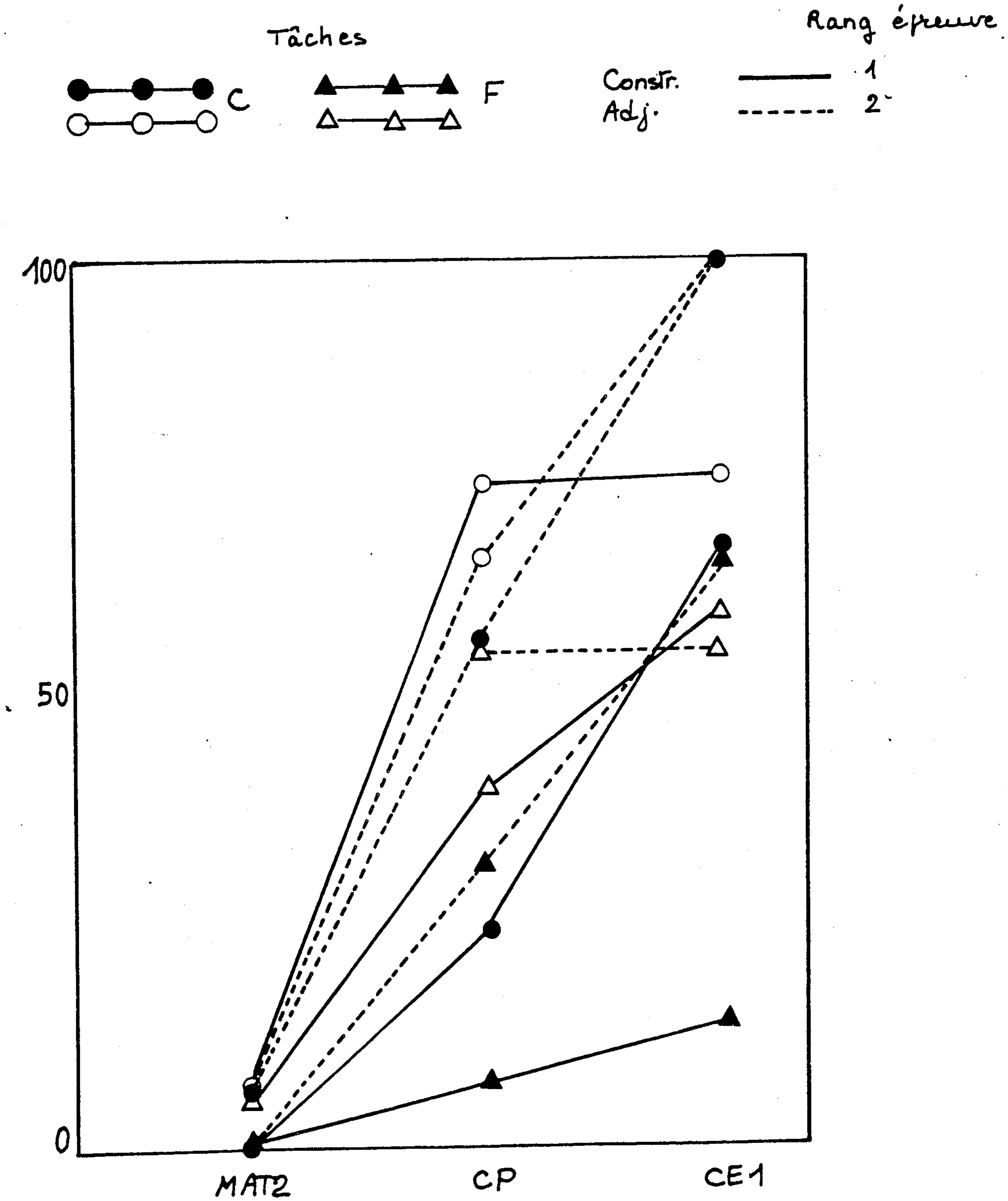


fig. 9

8. Mises en correspondance de dessins (F' x C') et des plots (F x C)

Le but des expériences de ce chapitre et des suivants est l'étude des hypothèses que les enfants peuvent faire quant aux caractères d'une correspondance entre deux "ensembles-produits" (ou plus exactement entre collections d'éléments représentables comme des ensembles produits).

A partir d'un paradigme général, que nous allons donner ci-dessous, chacune des expériences vise de plus à explorer une question particulière

8.1. Paradigme général commun

On fait de deux collections $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ d'éléments, chacune représentable comme un produit cartésien :

$$\mathcal{E}_1 = X_1 \times Y_1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_2 = X_2 \times Y_2$$

les ensembles sont tels que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ et

$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, les cardinaux petits : 3 ou 4.

On met en correspondance φ une partie P_1 de $\mathcal{E}_1$ et une partie P_2 de $\mathcal{E}_2$ de sorte que cette correspondance soit la restriction d'une bijection produit.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}_1 \arrow[r, "f \times g"] & \mathcal{E}_2 \\
P_1 \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\varphi"] & P_2 \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

La partie P_1 est telle qu'une seule bijection f x g ait pour restriction φ. Le problème posé à l'enfant est d'associer chaque autre élément de $\mathcal{E}_1$ à un élément de $\mathcal{E}_2$ de façon à respecter la règle qui a conduit à la relation entre P_1 et P_2 (et dont il doit faire l'hypothèse). Les observations vont porter sur les propriétés de la relation qu'il va effectivement établir.

A partir de ce paradigme général commun, les situations-problèmes construites peuvent différer d'une manière importante, nous analyserons donc chacune d'elle spécifiquement. Les outils plus précis d'analyse seront introduits, quand ce sera nécessaire, au cours de l'exposé des différentes expériences.

o

o o

8.2. Présentation des "PLOTS ET DESSINS"

Matériel

On donne au sujet un ensemble de plots (1) qu'il a précédemment construit (trois formes et trois couleurs). On donne d'autre part un tablea où sont présentés des dessins de trois formes (étoile E, lune L, croix X) et trois vouleurs (vert v, rouge r et noir r).

Trois types de tableaux peuvent être présentés au sujet :

- un tableau AS où les dessins sont rangés en produit de lignes (couleurs) et colonnes (formes) ;

- un tableau AP où les dessins sont rangés en carré gréco-lation (trois formes et trois couleurs différentes par ligne et par colonne du tableau).

- un tableau AI construit pour répondre à la condition suivante : dans chaque ligne et chaque colonne une couleur et une forme sont présentes deux fois, dans la mesure où les contraintes "mathématiques" du produit cartésien le permettent.

Ces trois tableaux correspondent à trois degrés de ressemblance entre dessins situés sur les lignes et les colonnes :

AS = proximité maximum
AP = différenciation maximum
AI = degré intermédiaire.

---

(1) Les plots, construits dans une épreuve préalable ("plots") sont définis par la couleur de leur support et la forme de la plaquette insérée dans ce support. Les formes sont : rectangle, carré, triangle isocèle, les couleurs bleu, jaune et blanc.

Consigne

0) On demande au sujet une description des dessins jusqu'à obtenir une description suivant la forme et la couleur.

1) Mise en relation des plots avec les dessins AS :
On présente au sujet le tableau AS en lui disant : "Je vais mettre des plots avec des dessins, tu dois mettre les autres pour que ça aille bien avec ce que j'ai mis".
On place les plots de sorte que les plots de même forme soient avec les dessins de même forme, de même pour les couleurs.
Quand le sujet a placé tous les plots sur les dessins, on lui demande de décrire ce qu'il a fait.
Si la correspondance établie ne fait pas correspondre les formes aux formes et les couleurs aux couleurs de façon indépendante, on donne des indications au sujet pour arriver à ce que cette condition soit satisfaite.
On demande ensuite au sujet de mettre les plots avec les mêmes dessins, mais sur le tableau AP.

2) Mise en relation des plots avec les dessins sur un tableau AP ou AI :
On place quelques plots sur des dessins de AP ou AI. L'expérimentateur demande au sujet : "Place les autres pour que ça aille bien avec ce que j'ai déjà mis".
On appellera essai l'établissement d'une correspondance totale entre plots et dessins prolongeant la correspondance partielle donnée au sujet.
Après chaque essai du sujet, on lui demande s'il sait dire comment il a placé les plots avec les dessins.
Ces réponses sont analysées sous la rubrique "justification" ou "expression".
D'un essai à l'autre on change le type de tableau présenté (AP ou AI).
S'il y a échec du sujet à compléter suivant une correspondance produit après deux essais successifs conduisant à un même type de réponse, on passe à la dernière partie de l'expérience.

3) Dans le dernier temps de l'expérience on décrit au sujet la correspondance partielle entre les plots et les dessins (sans préciser explici-

tement que la forme va avec la forme et la couleur avec la couleur : en disant seulement par exemple : "Le vert avec le jaune", etc..., le carré avec la croix", c'est-à-dire en décrivant la correspondance particulière effectuée).
Un essai où la correspondance particulière est ainsi décrite est suivi d'un essai du type précédent (sans description).
Le nombre d'essais pour un sujet dépend de son degré de réussite dans l'épreuve (utilisation de 0, 1 ou 2 critères) et des justifications qu'il peut donner à la fin de chaque essai ; ce nombre est compris entre 2 et 4.

Sujets

Les sujets sont des élèves d'une école primaire de filles de CM2 à CE1 "fort" (classe du niveau de CE1-CE2). 46 sujets de 7;8 à 10;7 ans ont passé l'épreuve de correspondance. Nous avons groupé ces sujets suivant leur âge en trois groupes :

groupe III	: 7;8 à 8;5	16 sujets, moyenne âge : 8;1
groupe II	: 8;8 à 9;6	14 sujets, moyenne âge : 9;1
groupe I	: 9;8 à 10;7	16 sujets, moyenne âge : 10;3

(Les groupes d'âge correspondent aux classes scolaires ; les sujets ont été choisis parmi les élèves dont l'âge est le plus proche de l'âge normal dans leur classe).

Tous les sujets ont passé au préalable l'épreuve de construction de l'ensemble des plots utilisés dans cette expérience.
Les sujets des groupes II et III ont des âges très voisins de la moyenne de leur groupe ; la dispersion des âges dans le groupe I est un peu plus grande.
Un sondage sur des sujets plus jeunes (entre 7 et 7;6) a montré l'inadaptation de l'épreuve pour cet âge : la passation préalable de l'épreuve de construction nécessite un temps très important, et l'échec complet à l'épre

de correspondance n'apporte que peu d'information sur les problèmes que nous nous posons (en particulier sur la relation entre la correspondance effectuée et la construction préalable $F_1 \times C_1$).

8.3. Analyse de la situation expérimentale

Les problèmes posés par la situation expérimentale sont de deux types, non indépendants :

1. problèmes posés par la réalisation concrète, en particulier par la disposition spatiale des éléments de $\mathcal{D}$ (suivant les trois tableaux possibles AS, AP et AI).

2. problèmes dus à la correspondance partielle entre un sous-ensemble des plots et un sous-ensemble des dessins que nous donnons au sujet.

8.3.1. Problèmes de présentation spatiale

Les tableaux AS, AP et AI diffèrent par la présentation des éléments de l'ensemble $\mathcal{D}$ des dessins. Les relations de proximité qui peuvent exister entre les différents éléments sont différentes dans ces trois situations donc les relations de proximité qu'elles peuvent induire entre les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}$ des plots (mis en correspondance avec les dessins) sont aussi différentes : d'un item à l'autre nous pouvons donc les faire changer pour éviter leur utilisation par le sujet pour construire la correspondance cherchée. Le cas du tableau AS est particulier : en effet il y a isomorphisme entre le rangement en produit de lignes et colonnes et le produit spatial sous-jacent .

Donc quand nous donnons la correspondance partielle entre P_1 et D_1, nous donnons aussi une correspondance partielle entre P_1 et un ensemble de positions (spatiales) qui a elle aussi des propriétés permettant de la compléter en une correspondance produit.

Ce n'est pas le cas pour les présentations AP ni AI. La partie 2 de l'expérience se différencie donc, sur le plan théorique, des parties suivantes de l'expérience.

La disposition spatiale AS introduit une réalisation possible de la structure produit de C x F, avec une double partition (image réciproque des projections sur C et F) : sont alignés sur une même horizontale (resp. verticale) les timbres qui ont la même forme (resp. la même couleur). Si notre hypothèse sur les relations entre relations spatiales et relations ensemblistes (annexe du chapitre sur la méthodologie) est correcte, la complétion d'une correspondance produit avec ce type de disposition spatiale doit être plus facile qu'avec les autres dispositions.

En fonction de cette hypothèse nous avons présenté cette disposition spatiale en premier : les effets de familiarisation avec la tâche ne pouvant que faciliter les réponses ultérieures des enfants avec les dispositions AP (1) ou AI : si ces dispositions restent plus difficiles pour les enfants ce ne pourra donc pas être attribué à des effets d'ordre de présentation (qui jouent en sens inverse).

8.3.2. Problèmes d'information donnée sur la correspondance à compléter

Nous pouvons donner aux sujets des correspondances partielles entre plots et dessins leur fournissant des informations plus ou moins importantes sur les propriétés des correspondances utilisées : quand on fait croître le nombre de plots et de dessins en correspondance on fournit une information croissante sur les propriétés de la correspondance cherchée.

---

(1) La disposition AP maximise les différences de la même façon que AS maximise les ressemblances entre plots voisins. Mais sur le plan cognitif l'utilisation par les sujets des informations de type "positif" et celle de type "négatif" est asymétrique (cf. Lépine, 1969).

Nous allons préciser cette notion d'information pour certaines des correspondances partielles (possédant les propriétés α et β : détermination possible d'une correspondance bijective f (unique) entre formes des dessins et des plots, et d'une correspondance bijective c (unique) entre couleurs des dessins et des plots).

a - Nous mettons en correspondance une partie Po de $\mathcal{P}$ et une partie Do de $\mathfrak{D}$ ayant le nombre minimum d'éléments permettant de définir de manière unique des bijections f et c entre F_1 et F_2 d'une part, C_1 et C_2 d'autre part.

b - Nous mettons en correspondance un nombre plus grand d'éléments : toute correspondance partielle entre plots et dessins (vérifiant les conditions α et β) est une extension d'une correspondance partielle minimale (définie ci-dessus). Dans cette expérience nous avons adjoint un ou deux couples supplémentaires selon les essais (essais de types D_1 ou D_2).

A partir de cette analyse des informations données sur la correspondance nous avons défini, pour chaque groupe d'âge, sur l'ensemble des essais, un niveau moyen d'information :

Si I est le nombre d'essais passés par un sujet ;

Si n désigne le nombre total de couples (de plots et dessins) qui ont été présentés (correspondance partielle initiale fournie),

alors nous définissons le niveau d'information moyen par :

$$N = \frac{n}{I} - 3$$

La définition de N attribue le niveau 0 à un essai sans redondance d'information (Do) ; 1 à un essai avec une redondance (D1), 2 à un essai de type D2.

Pour la partie I (tableau AS) le niveau moyen est 1 pour tous les groupes ; pour la partie II (tableaux AP et AI) le niveau moyen d'information est voisin de 2 pour les enfants de 8 ans (CE), de 1,2 pour les enfants de 9 ans (CM1) et de 0,8 pour les enfants de 10 ans (CM2) : nous avons donc facilité a priori les réponses correctes des enfants plus jeunes : une évolution en termes d'amélioration des réponses avec l'âge n'en est donc que plus significative.

8.4. Résultats expérimentaux

Lorsque les plots ont été correctement mis en correspondance avec les dessins, y compris par intervention de l'expérimentateur, les sujets transfèrent chaque plot de AS sur "le même dessin" sur AP : tous les sujets parviennent à un transfert correct, éventuellement après un rappel de la consigne. La correspondance entre plots et dessins sur AS ne se réduit donc pas à un simple rangement des plots, selon des ressemblances de forme et/ou de couleur. De plus l'analyse des dessins selon leur forme et leur couleur ne pose aucun problème.

8.4.1. Les tableaux I et IA donnent le nombre de sujets dont les réponses sont compatibles avec une correspondance "F x C", "C", ou "F" dans les deux situations différant par la disposition spatiale AS / AP ou AI. Ces résultats sont notés sur les réponses antérieures à l'intervention de l'expérimentateur : en AS pour obtenir une relation produit à transférer sur AP, en AP ou AI en donnant une description de la correspondance présentée.

(Les réponses correspondent aux correspondances effectuées par les enfants, non aux justifications ou verbalisations).

Nous analysons ici une réponse "globale" au sens d'une réponse stable, exprimée sur deux essais successifs (ou justifiée lors de l'essai), en distinguant le seul résultat observé de la justification donnée. Il y a nécessairement moins de correspondances effectuées avec une justification.

Le mode de présentation (tableau AI ou tableau AP) pour un même "niveau" d'information (donnée de Do, D_1 ou D_2) n'a pas d'influence sensible sur les réponses.

TABLEAU I

âges / réponses	8;1	9;1	10;3	TOTAL
échec	2	1	0	3
C	5	3	3	11
F	3	1	3	7
F & C	6	9	10	25
N	16	14	16	46

TABLEAU IIA

âges / réponses	8;1	9;1	10;3	Σ
échec	6	5	3	14
C	5	3	3	11
F	3	2	3	8
F & C	2	4	7	13
Total	16	14	16	46

On observe :

a) d'une part, une difficulté plus grande des dispositions spatiales qui ne correspondent pas à un "produit spatial", ce qui confirme notre hypothèse initiale sur ce point ;

b) d'autre part, une évolution des réponses bidimensionnelles qui se présente de façon différente selon la disposition spatiale :
- lorsque les relations spatiales coïncident avec des relations ensemblistes (AS) c'est entre 8 et 9 ans (CE/CM1) que l'on observe une augmentation considérable des réponses bidimensionnelles (37,5 à 64 %) des sujets),
- lorsque les relations spatiales ne réalisent pas les relations ensemblistes du produit l'évolution est plus lente et plus régulière (12,5 %, 28,5 %, 43,7 %) ;

c) enfin l'échec à établir une correspondance au moins selon une dimension évolue également selon la disposition spatiale présentée :
- avec AS il est rare dès 8 ans (12,5 %), nul à 10 ans,
- avec AP ou AI il est important à 8 et 9 ans (35,7 %) et diminue à 18,7 % à 10 ans.

On peut résumer ces résultats : lorsque la disposition spatiale représente les projections produit "de base" ($\mathscr{D}$) et les partitions correspondantes alors la prise en compte d'au moins une projection est massivement utilisée dès 8 ans pour établir la correspondance, mais c'est seulement à 9 ans que les deux projections sont utilisées largement ; en revanche, lorsqu'aucune réalisation spatiale des projections n'est présente pour $\mathscr{D}$, la difficulté à faire des hypothèses "dimensionnelles" pour établir la correspondance est importante, et la difficulté à faire des hypothèses bidimensionnelles persiste à 10 ans pour la majorité des enfants.

8.4.2 Le tableau IIB qui donne le nombre des explications de la correspondance établie par les enfants confirme le décalage entre l'action et la formulation, décalage essentiellement marqué par les réponses bidimensionnelles.

TABLEAU IIB

âges / réponses	8;1	9;1	10;3	⅀
Ø	8	5	3	16
C	5	4	4	13
F	1	4	4	9
F & C	2 (12%)	1 (6%)	5	8
N	16	14	16	46

Nous avons effectué l'analyse des réponses par sujet. Les résultats qui suivent concernent les réponses sur l'ensemble des essais, étudiées en relation avec le niveau d'information.

8.4.3. Le tableau III donne le nombre d'essais avec prise en compte des deux dimensions F & C, d'une dimension F ou C, ou avec échec, pour les différents groupes d'âges, en précisant le nombre d'items, le nombre d'essais et le niveau d'information pour la présentation AS.

Le tableau IV présente les données analogues pour les présentations AP ou AI.

TABLEAU III

	items	essais	niveau info.	Ø	F/C	F & C
âge	n	I	N	échec	1 dim.	réussite
8;1	111	28	1	10(35,7)	12 (44)	6 (21)
9;1	118	30	1	12 (40)	9 (30)	9 (30)
10;3	103	26	1	5 (19)	11 (42,5)	10 (38,5)

(Entre parenthèses les pourcentages).

TABLEAU IV

	items	essais	niveau info.	Ø	F/C	F & C
âge	n	I	N	échec	1 dim.	réussite
8;1	146	29	2	6(26,7)	14 (48)	9 (31)
9;1	55	13	1,2	2(15,4)	5 (46)	5 (38,5)
10;3	55	15	0,8	2(13,3)	6 (39,7)	7 (47)

Le tableau III montre à niveau d'information égal l'évolution selon l'âge des correspondances effectuées : le changement net se situe ici entre 9 et 10 ans pour la baisse des réponses "d'échec", c'est-à-dire sans prise en compte d'au moins une dimension ; ces résultats prennent en compte toutes les réponses des sujets, dont leurs réponses initiales, elles sont donc moins bonnes à priori que celles du tableau I.

La comparaison entre ces tableaux donne des indications sur la mobilisation possible d'hypothèses appropriées à la tâche en offrant au sujet la possibilité de reprendre ses réponses : cette mobilisation se manifeste un peu à 8 ans, très nettement à 9 ans et 10 ans (de 40 % d'échecs à 7 % à 9 ans, de 30 % à 38 % de réussites à 64 % à 9 et 10 ans).

Nous pouvons remarquer que ces résultats qui comportent la phase "d'entrée dans la tâche" pour AS sont assez proches des résultats finaux pour la présentation AP ou AI.

Le tableau IV confirme pour l'ensemble des réponses l'évolution génétique. Contrairement au cas du tableau III établi par AS nous avons ici un critère moins strict que dans le tableau III pour l'analyse des réponses unidimensionnelles ou bidimensionnelles, puisque aucune contrainte de cohérence n'est en jeu.

Ainsi il semble apparaître les éléments suivants :

- les analyses bidimensionnelles ne sont pas spontanément utilisées par les enfants pour trouver une "règle du jeu" de complétion d'une correspondance entre produits F x C, même lorsque la disposition spatiale réalise une structure produit de l'ensemble de base ; jusqu'à 10 ans beaucoup d'enfants ne font spontanément aucune hypothèse dimensionnelle.

Néanmoins, avec la disposition spatiale matricielle de AS, on peut mobiliser des analyses dimensionnelles et obtenir chez les enfants de 8 ans des réponses unidimensionnelles (50 %) et éventuellement bidimensionnelles (37 %), et chez les enfants de 9 et 10 ans une forte majorité de réponses bidimensionnelles (plus de 60 %).

La disposition spatiale joue un rôle très important puisque lorsque les sujets doivent compléter une correspondance entre produits sur une disposition spatiale non matricielle (AP, AI) les réponses bidimensionnelles retombent presque au niveau initial sur AS. Quant aux hypothèses dimensionnelles, elles ne sont pas stables, puisque les échecs à établir de façon cohérente deux correspondances successives au moins unidimensionnelles sont en nombre voisin des échecs spontanés initiaux.

8.5 Mobilisation d'hypothèses uni ou bidimensionnelles par description d'une correspondance-produit particulière

Lorsque les sujets ne disposent que de l'information fournie par la donnée des plots placés sur le tableau des dessins, ils doivent faire des hypothèses (conscientes ou non) sur les propriétés de la correspondance partielle. On peut se demander si la description, fournie par l'expérimentateur, des propriétés d'une première correspondance, sous la forme "le bleu va avec le noir", "le carré va avec l'étoile", va faciliter des hypothèses appropriées pour une nouvelle correspondance.

Le tableau V donne la distribution des réponses données par les enfants à une correspondance proposée après description d'une correspondance précédente différente (1).

(1) 4 enfants de 10 ans ayant donné des réponses unidimensionnelles n'ont pu terminer l'épreuve pour des raisons de contrainte de temps (fin de la 1/ journée scolaire).

(Tableau AI, niveau d'information 1).

TABLEAU V

âges réponses	8;1	9;1	10;3	TOTAL
Echec	3	1	1	5
C	8	4	1	13
F	1	2	0	3
F & C	4	7	10	21
N	16	14	12	42

La comparaison des résultats portés dans ce tableau V et ceux du tableau IIA confirme la possibilité de mobiliser des hypothèses "dimensionnelles" : les réponses correctes augmentent de 12 à 25 % à 8 ans, de 29 à 50 % à 9 ans et de 44 à 83 % à 10 ans, alors que les échecs régressent de 38 à 19 %, 36 à 7 % et 19 à 8 % respectivement.

Le tableau VI présente l'évolution des réponses avant et après la description d'une correspondance. Les notations de type (4/7) en face d'un codage F/C signifient que 4 des réponses sont issues de réponses selon la forme, 7 selon la couleur.

TABLEAU VI

AGE EVOLUTION	8;1	9;1	10;3	Σ
Ø → Ø Ø → F/C Ø → F & C	3 3 (0/3) 0	1 3 (1/2) 1	1 1 (0/1) 1	5 7 (0/6) 2
F/C → F/C F/C → F & C	6 (1/5) 2 (2/0)	3 (1/2) 2 (1/1)	0 2 (1/1)	9 (4/7) 6 (4/2)
F&C → F&C	2	4	7	13
N	16	14	12	42

Les enfants qui ne faisaient pas spontanément d'hypothèses unidimensionnelles continuent d'échouer ou donnent des réponses unidimensionnelles (deux sujets sur 13 de plus de 9 ans, passent à une réponse bidimensionnelle.

Les enfants qui faisaient des hypothèses unidimensionnelles les conservent ou donnent des réponses bidimensionnelles ; le changement semble dépendre de la dimension spontanément utilisée : les sujets qui prenaient en compte la couleur restent de façon dominante unidimensionnels dans leur réponse (c'est le cas des 5 sujets de 8 ans), alors que ceux qui prenaient en compte la forme donnent aussi bien des réponses bidimensionnelles (d'où l'accentuation de l'asymétrie des réponses unidimensionnelles en faveur de la couleur).

En conclusion

L'expérience "plots et dessins" sur la mise en correspondance de deux produits forme x couleur que la disponibilité d'hypothèses stables liées à l'analyse dimensionnelle du matériel est limitée, même pour des enfants maîtrisant la construction du produit F x C (CM1 et CM2, 9-10 ans). La mobilisation d'hypothèses dimensionnelles est possible, soit en s'appuyant sur la disposition spatiale (matricielle) du matériel (mais cette mobilisation n'est pas stable), soit par description d'une correspondance particulière. Dans ce cas plus de 50 % des sujets de plus de 9 ans peuvent ensuite donner des réponses bidimensionnelles (80 % à 10 ans), les enfants de 8 ans ne peuvent pour la plupart tenir compte que d'une dimension (de façon dominante avec notre matériel il s'agit de la couleur).

9. Mise en correspondance de plots (F' x C') et de timbres (F x C)

Les expériences analysées dans les chapitres précédents ont déjà apporté un certain nombre d'éléments sur la structuration du champ conceptuel du "produit cartésien".

En ce qui concerne la construction, on constate que les enfants rencontrent d'abord d'extrêmes difficultés à résoudre la contradiction entre l'indépendance des deux dimensions (chacune des couleurs peut être associée à une forme quelconque) et l'unicité de réalisation qui porte simultanément sur les deux dimensions (puisque deux couples (f, c) et (f', c') sont égaux si f = f' et c = c') : ou bien ils font des couples différant à la fois pour chaque dimension, ou bien ils ne peuvent éviter les doubles. Ultérieurement l'indépendance et l'unicité sont simultanément prises en compte ; le contrôle de l'exhaustivité de la construction (avoir fait tous les couples possibles) se met en place initialement à travers une représentation "additive", avant que le résultat ne se structure en produit, où les deux dimensions peuvent jouer un rôle symétrique.

Lorsqu'il s'agit de mettre en correspondance bijective deux collections représentables comme des produits (avec les mêmes dimensions que celles utilisées pour les constructions) la première expérience a montré un décalage dans les conduites des enfants : des hypothèses "unidimensionnelles" sont spontanément utilisées alors que ces mêmes sujets effectuent par ailleurs des opérations bidimensionnelles dans les contrôles de construction, les dénombrements, la prédiction des effets de l'adjonction d'un élément pour l'une puis l'autre dimension, dans les opérations de compléments.

Plusieurs hypothèses, non exclusives, peuvent rendre compte de ce décalage :

- la tâche est trop peu contraignante : la signification de la correspondance n'est pas fonctionnelle, elle relève de la recherche d'une "règle du jeu" définie par l'expérimentateur, aucune validation n'est apportée aux réponses produites par les enfants ; une quelconque hypothèse permettant au sujet de produire une réponse peut donc lui paraître suffisante, on doit remarquer que c'est bien le cas pour les réponses unidimensionnelles qui correspondent à une certaine règle du jeu ;

- l'analyse du matériel expérimental constitué de deux produits est plus difficile que l'analyse d'un seul produit, et n'est effectuée que selon une dimension pour chacun des produits (il y a bien 2 analyses, mais chacune selon une seule dimension) ;

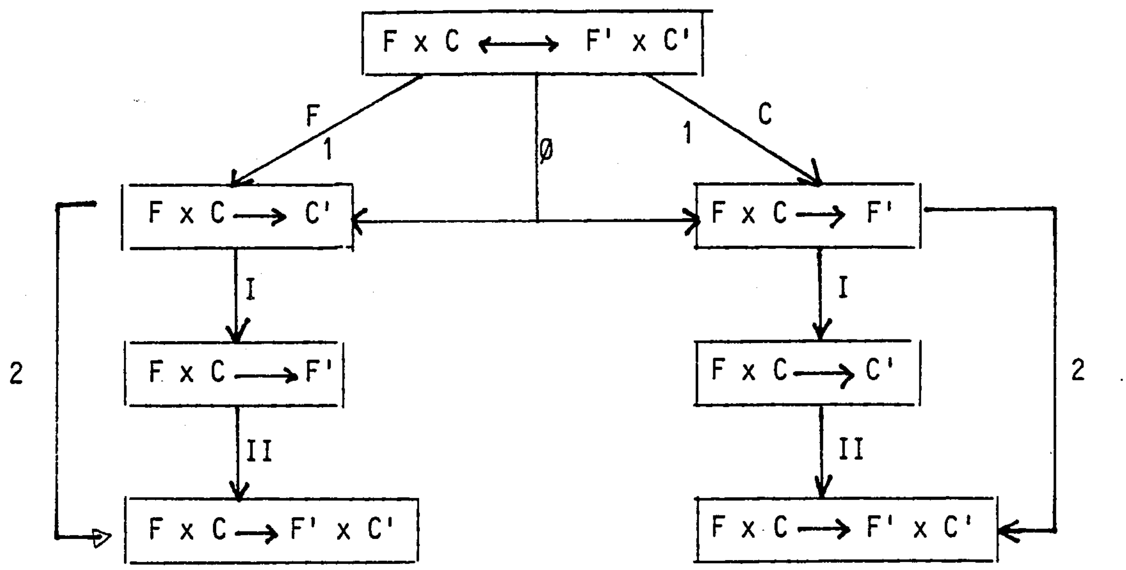
- il y a bien analyse bidimensionnelle de ce matériel complexe, mais les enfants ont des difficultés spécifiques à "multiplier" les deux relations indépendantes entre dimensions, c'est-à-dire à établir et à faire fonctionner l'hypothèse d'une règle du jeu bidimensionnelle.

L'expérience qui suit : "timbres et plots", est destinée à apprécier la plausibilité de ces différentes hypothèses ; cette expérience contient une phase où le sujet doit construire une correspondance entre un produit (formes x couleurs) et un ensemble défini par une seule des dimensions ; chaque dimension est successivement utilisée : si l'analyse bidimensionnelle du matériel est sans problème, et chacune des hypothèses "unidimensionnelle" est disponible, alors les difficultés tiennent soit à la difficulté à "composer multiplicativement" de telles hypothèses, soit au caractère insuffisamment contraignant de la tâche, où la règle du jeu est trop ouverte. On peut donc ainsi espérer se prononcer sur l'une des trois hypothèses (en fonction des niveaux d'âge la réponse peut ne pas être la même).

PLOTS ET TIMBRES

Les ensembles de timbres et de plots sont construits à partir de 4 valeurs pour la forme et de 4 valeurs pour la couleur : cela nous permet d'avoir des probabilités plus faibles d'obtenir des observables non significatifs des représentations (les choix des sujets sont ainsi beaucoup plus ouverts que dans les situations C3 x F3) puisque plus d'éléments sont disponibles pour un même choix.

Les éléments ainsi que leurs dispositions spatiales possibles sont donnés dans les figures 1 à 7 en fin de paragraphe. La passation des épreuves est schématisée sur l'organigramme suivant :



Les "trajectoires" de passation sont les suivantes : :

* I-II pour les plus jeunes sujets qui commencent par une épreuve "unidimensionnelle" : le passage I exige de changer l'analyse de F x C, le passage II d'utiliser les 2 dimensions.

* 1-2 pour les sujets qui commencent par une épreuve bidimensionnelle, les branches sont déterminées par la nature de la dimension éventuellement prise en compte (pour un sujet établissant d'emblée une bijection produit attestée l'épreuve est terminée).

9.1. Déroulement de l'expérience, épreuves et consignes, description des réponses

Une phase préliminaire consiste en présentations de plots (construits au préalable par l'expérimentateur) et une présentation des timbres en précisant les deux dimensions qui les définissent.

Une première épreuve T permet de s'assurer que le sujet peut identifier les timbres selon les deux dimensions simultanément : elle consiste à transporter des plots disposés sur le tableau "S" des timbres sur "les mêmes timbres" du tableau "P". On corrige les deux premières erreurs du sujet et on le laisse ensuite achever le transport des plots (au minimum 8 plots : 2 par forme et 2 par couleur).

Après la phase préliminaire et l'épreuve de transport, les sujets passent certaines épreuves suivantes, dont le nombre et l'ordre dépendent de l'âge des sujets et de la succession de leurs réponses.

Epreuve produit

On dispose dans les cases du tableau D (des timbres) 6 plots (un par timbre) en réalisant les contraintes suivantes :

1/ L'ensemble des plots contient, au moins, un pivot c'est-à-dire un ensemble de 4 plots différant à la fois par la forme et la couleur.

2/ La forme du plot associé à un timbre est déterminée par la forme du timbre ; il en est de même pour la couleur.

Les conditions 1/ et 2/ permettent de déterminer de manière univoque une correspondance terme à terme, p, entre les plots et les timbres qui soit le composé d'une correspondance terme à terme, f, entre les formes et d'une correspondance terme à terme, c, entre les couleurs.

La consigne donnée au sujet est "de mettre les autres plots avec les timbres pour que ça aille bien avec ceux qui y sont déjà" (1). Lorsque tous les plots sont placés, on analyse cette correspondance, en regardant si l'une (au moins) des correspondances f et c est vérifiée, ou s'il existe une correspondance "mixte" entre formes de l'un des ensembles et couleurs de l'autre. Lorsque la correspondance p n'a pas été établie, le sujet passe une épreuve dite "unidimensionnelle" définie comme suit :
Si un sujet a tenu compte dans l'épreuve produit de la seule <u>forme des timbres</u> (ou de la couleur), il passe <u>l'épreuve unidimensionnelle</u> C (ou F).
Il repasse ensuite une épreuve produit.

<u>Epreuves "unidimensionnelles"</u>

Les plots sont décomposés en formes, représentant des éléments de F', et en couleurs, représentant les éléments de C' (4 exemplaires de chaque élément).

<u>Epreuve unidimensionnelle F</u>

On dispose dans les cases du tableau D (des timbres) 6 plaquettes repré-

---

(1) Il pourrait y avoir un biais important dû au vague de ce genre de consigne les résultats qui sont donnés plus loin pour cette épreuve indiquent que la "règle du jeu" pour l'élève correspond à l'intention de l'expérimentateur.

sentant les formes de F' en réalisant les contraintes :

1/ toutes les formes de F' sont représentées,
2/ la forme de la plaquette associée à un timbre est déterminée par la forme du timbre.

Les deux conditions précédentes permettent de compléter la correspondance (timbres de $\mathcal{C}$) $\longrightarrow$ (formes de F') déterminée par une correspondance f' terme à terme entre F et F'. (1)

La consigne est de mettre les plaquettes avec les autres timbres "pour que ça aille bien avec celles qui y sont déjà".

<u>Epreuve unidimensionnelle C</u>

Cette épreuve est analogue à la précédente en remplaçant "formes" par "couleurs". La correspondance entre les timbres et les supports de couleur est déterminée par une correspondance c' terme à terme entre C et C' (2).

Nous allons préciser les épreuves passées par chaque groupe de sujets :

SUJETS - 48 sujets de 6 à 11;4 ans ont passé l'expérience. Ils se répartissen en quatre groupes d'âge :

Groupe I	16 sujets de 6 à 7 ans, moyenne 6;5
Groupe II	8 sujets de 8;1 à 8;8, moyenne 8;4
Groupe III	16 sujets de 8;9 à 10 , moyenne 9;5
Groupe IV	8 sujets de 10 à 11;4, moyenne 10;7

---

(1) Cette correspondance f' est différente de la précédente f : les couples de formes de F et F' associées par f' sont différents de ceux associés par f.

(2) c' et c diffèrent de la même manière que f' et f : les couples de couleurs de C et C' associées par c' sont tous différents de ceux des couleurs associées par c.

Déroulement de l'expérience selon les groupes

Groupe I

. 6 sujets passent en 1er l'épreuve de correspondance produit entre timbres et plots (avec la donnée initiale de 6 plots en correspondance).

Ceux qui effectuent une correspondance cohérente déterminée par une dimension (forme par exemple) passent ensuite l'épreuve unidimensionnelle complémentaire, c'est-à-dire celle où les couleurs de C' sont mises en corresponsance avec les timbres en fonction de la couleur de ceux-ci.

. 5 sujets passent en premier l'épreuve F, puis l'épreuve complémentaire C. Ils terminent par l'épreuve de correspondance complète P (sauf 1 sujet qui a dépassé le temps limite de 30 mn).

. 5 sujets passent d'abord l'épreuve C, puis l'épreuve complémentaire F. Ils passent en dernier l'épreuve de correspondance complète P.

Groupes II, III, IV

Les sujets passent en premier l'épreuve de correspondance complète P. Suivant la dimension retenue pour effectuer cette correspondance, les sujets passent ensuite de F ou C correspondant à l'autre dimension. Les sujets refont ensuite une correspondance complète P.

Exemple :

f : f1 ⟶ rond
f2 ⟶ carré
f3 ⟶ rectangle
f4 ⟶ triangle

f' : f1 ⟶ carré
f2 ⟶ triangle
f3 ⟶ rond
f4 ⟶ rectangle

c : c1 ⟶ noir	c' : c1 ⟶ jaune
c2 ⟶ vert	c2 ⟶ rouge
c3 ⟶ rouge	c3 ⟶ vert
c4 ⟶ jaune	c4 ⟶ noir

La première correspondance étant choisie, on peut en trouver 3 autres qui soient ainsi totalement différentes (nombre largement suffisant pour notre expérience).

Certains sujets font une correspondance mixte de type F→C' ou C→F' nous avons donc utilisé une notion plus faible que le changement de dimension, pour définir la correspondance complémentaire. Cette notion porte seulement sur la dimension utilisée en ce qui concerne les timbres (puisque c'est l'ensemble des timbres qui sert de base à des correspondances tout au long de l'épreuve). Nous verrons dans l'analyse des résultats que peu de sujets construisent spontanément, en première épreuve, une telle correspondance "mixte" (pour laquelle se pose le problème d'interprétation de la notion de changement de critère).

Analyse des résultats

1/ Epreuve T :

Tous les sujets sauf 1 du groupe I, ont réussi l'identification correcte des timbres dans l'épreuve T de transport des plots de la présentation S des timbres à la présentation P.

Un sujet du groupe I n'a tenu compte que de la forme des timbres pour ce transport.

2/ Epreuves de correspondance

L'analyse des résultats est rapportée aux critères utilisés dans la décomposition des timbres pour établir les correspondances proposées.

Pour chaque groupe d'âge, on note :

a) La répartition des réponses à la première correspondance produit obtenue,

b) Pour tous les sujets, sauf ceux qui ne font aucune correspondance cohérente dans la première épreuve produit, ou au contraire font une correspondance produit correcte, il est possible de définir une épreuve complémentaire. Nous noterons alors la relation qui existe entre la réponse à la première épreuve produit et la correspondance complémentaire.

Nous codifions les réponses de la façon suivante : E = échec à utiliser une dimension, forme ou couleur, des timbres pour déterminer une correspondance, R = réussite à l'utilisation des deux dimensions pour déterminer une correspondance produit.

$F \longrightarrow F'$: les formes F des timbres déterminent les formes F' des plots (correspondance "forme")

$F \longrightarrow C'$: les formes des timbres déterminent les couleurs C' des plots (correspondance "mixte")

Dans ces deux cas, la correspondance unidimensionnelle complémentaire est "C".

$C \longrightarrow C'$ et $C \longrightarrow F'$ sont définies de manière analogue.

La couleur C des timbres est déterminante pour la correspondance effectuée, la correspondance complémentaire est donc la correspondance "F".

9.2. Résultats d'ensemble

Nous devons d'abord remarquer que les formes des timbres et celles des plots n'ont pas le même statut par rapport à la couleur : les formes des timbres ne sont pas significatives pour les sujets et ce sont elles qui sont colorées, alors que les formes des plots sont significatives et sont de plus dissociées matériellement du support de la couleur. On peut donc se poser le problème de leur usage respectif dans la correspondance produit.

Leur utilisation respective dans l'épreuve de correspondance produit, présentée comme dernière épreuve ne fait pas apparaître de différence. F désigne l'utilisation de la forme des timbres, F' celui de la forme des plots. Sur 34 sujets qui n'effectuent pas une correspondance produit complète et n'échouent pas totalement, non plus, 19 utilisent F, 17 utilisent F'

Il n'y a donc pas de différence d'utilisation sur l'ensemble des sujets.

Les tableaux I et II donnent les répartitions de réponses respectivement à la correspondance produit initiale (T.I) et à la correspondance produit finale (T.2). 12 sujets de CP ont commencé avec une épreuve "unidimensionnelle" ; par ailleurs, 4 sujets de CM1 n'ont pas passé des épreuves "unidimensionnelles" différentes (association des timbres aux plots selon une seule dimension), mais la "règle du jeu" s'est avérée en fait mal définissable et surtout mal reliable à l'analyse des réponses des sujets, nous ne les avons pas comptabilisées pour les épreuves initiales ni le changement de critère.

Tableau I

	échec	"C"	"F"	C → F'	F → C'	bidim.	N	
I	3	3	-	-	-	-	6	} 14
II	2	4	1		1	-	8	
III	1	3	7	1	-	-	12	} 20
IV	1	-	5		2	-	8	
N	7	10	13	1	3	-	34	

Pour les sujets des groupes II, III, IV, la passation des épreuves unidimensionnelles suivant la première épreuve de correspondance produit se traduit par la disparition des échecs : tous les enfants utilisent en définitive au moins une hypothèse unidimensionnelle.

Tableau II

Groupe d'âge	E	C→ C'	C → F'	F→ F'	F→ C'	R	Nbre sujets
I 6;5	10	5	0	0	0	0	15
II 8;4	1	5	0	1	1	0	8
III 9;5	0	3	2	10	0	1	16
IV 10;7	0	0	0	4	3	1	8
TOTAL	11	13	2	15	4	2	47

Nous remarquons la relative rareté des réponses "mixtes" (C→ F' ou F→ C'), en particulier pour les enfants les plus jeunes (1/23 sujets pour les élèves de 6 à 8 ans).

L'utilisation analogue de F et F' (et de C et C') ainsi que cette rareté des réponses mixtes justifie a posteriori la notion de changement de critère que nous avons utilisée pour le passage de la première épreuve à la seconde.

En ce qui concerne l'utilisation différenciée des 2 dimensions, nous observons pour l'épreuve initiale comme pour l'épreuve finale une utilisation croissante de la forme, avec une différence marquée entre le groupe II (CE2) et le groupe III (CM1) et une homogénéité relative des groupes I et II d'une part, III et IV d'autre part.

A un premier niveau d'analyse sur l'évolution des réponses, nous regroupons ces 4 groupes en deux groupes : A (I + II) et B (II + III).

Etude des changements d'hypothèses (inversion des dimensions définissant la "règle du jeu" pour les correspondances)

Nous nous restreignons à l'analyse des cas où les réponses initiales étaient homogènes, c'est-à-dire où les correspondances établies étaient soit F ⟶ F' soit C ⟶ C'.

Le tableau III donne la répartition des réussites à cette inversion de critère pour chacun des deux groupes.

"F" ⟶ "C" désigne le passage d'une correspondance selon la forme à une correspondance selon la couleur, "C" ⟶ "F", le passage inverse.

Dans les résultats a/b, a désigné le nombre d'inversions réussies, b le nombre de sujets établissant la correspondance initiale selon la première dimension.

Tableau III

	"F" ⟶ "C"	"C" ⟶ "F"	Σ
A	0/2	0/11	0/13
B	11/12	1/3	12/15

L'échec massif dans le groupe A est compatible avec l'hypothèse que l'utilisation de la couleur ne correspond pas tant à sa dominance sur la forme qu'à la non-pertinence de la forme comme dimension pour établir une relation. La réussite massive du groupe B à passer de la forme à la couleur indique qu'il s'agit bien dans les correspondances initiales, où une hypothèse unidimensionnelle "forme" est disponible, d'un privilège relatif de la forme sur la couleur - et non d'une indisponibilité de l'hypothèse unidimensionnelle "couleur".

L'évolution entre les groupes A et B porterait alors sur l'accession d'une dimension au statut de dimension déterminante pour une relation. L'autre dimension lui étant subordonnée peut néanmoins être "mobilisée" en jouant sur les contraintes de la situation.

Le tableau IV, construit à partir du tableau II donne le nombre des réponses unidimensionnelles "F", "C", les réponses "mixtes" et les réponses bidimensionnelles, de chacun des groupes A et B.

Tableau IV

	échec	"C"	"F"	mixte	bidim.	N
A (CP-CE2)	11	10	1	1	0	23
B (CM1-CM2)	0	3	14	5	2	24

La comparaison entre les tableaux III et IV indique que les sujets du groupe B qui ont changé de critère sont pour l'essentiel revenus à l'hypothèse dominante, et pour certains ont pu alors effectuer des correspondances mixtes.

9.3. Analyse des changements de critère dans les différents groupes d'âge

Pour chaque groupe d'âge, nous donnons les caractères de la correspondance initiale et nous croisons les réponses "unidimensionnelles" pour la correspondance produit et celles données pour la correspondance unidimensionnelle "complémentaire", c'est-à-dire nécessitant de la part du sujet, un changement de critère.

. <u>Groupe I</u> (CP - 6;5 ans)

Le tableau GI_1 suivant donne la répartition des réponses pour chaque correspondance initiale proposée aux sujets de CP : P désigne la correspondance produit, F la détermination des formes de plots, C de la couleur.

Tableau GI_1

	E	F→ F'	F→C	C→ C'	C→ F'	R	Nbre de sujets
P	3	0		3		0	6
C	1	0		4			5
F	4	1		0			5
Σ	8	1	0	7	0	0	16

Nous remarquons que :

1/ Il n'y a aucune correspondance "mixte",

2/ Un seul sujet utilise la dimension "forme" sur les 11 sujets pour lesquels elle pouvait déterminer une correspondance cohérente.

3/ Seule la correspondance unidimensionnelle "couleur" est réussie (4/5 sujets).

Nous verrons dans la discussion générale l'interprétation de ces résultats.

Le tableau GI_2 donne les relations entre la première décomposition (des timbres et des plots) et la réponse à l'épreuve unidimensionnelle complémentaire E, F F' et C F' sont les réponses à "F", E, C C' et F C', les réponses possibles à C.

Ce tableau porte sur les réponses de 8 sujets ayant utilisé une dimension privilégiée dans la première épreuve.

Tableau GI_2

	Unidimensionnelle F			Unidimensionnelle C			Σ
1ère décompos.	E	$F \rightarrow F'$	$C \rightarrow F'$	E	$C \rightarrow C'$	$F \rightarrow C'$	
C C'	1	0	6				7
F F'	0			0	0	1	1
TOTAL	1	0	6	0	0	1	8

Il n'y a aucune réussite d'inversion du critère utilisé dans la décomposition des timbres pour les 8 sujets qui avaient une épreuve de changement de critère.

7/8 sujets gardent la même décomposition des timbres (en s'arrêtant si la correspondance devient incompatible avec la matériel qui leur reste ou en modifiant alors les données initiales compatibles).

1/8 échoue à faire une correspondance déterminée par une dimension des timbres.

Pour les 7 premiers sujets les correspondances mixtes $C \rightarrow F'$ et $F \rightarrow C'$ proposées aux sujets (correspondants à leur réponse spontanée à la correspondance et non plus complémentaires) sont réussies.

Si nous étudions maintenant le critère utilisé dans la première correspondance cohérente (tableau GI_3) et par l'ensemble des sujets pour la correspondance produit (tableau GI_4) nous obtenons :

Tableau GI_3

	$C \rightarrow C'$	$C \rightarrow F'$	$F \rightarrow F'$
Nbre de sujets	10	1	2
Epreuve	produit = 3 "C" = 7	"F" = 1	"F" = 2

Tableau GI_4

	E	$C \rightarrow C'$	$F \rightarrow F'$	Σ
Nbre de sujets	10	5	0	15

Nous remarquons :

1/ Que la réussite à une correspondance "unidimensionnelle" (13 sujets) n'implique pas la possibilité d'utiliser un critère de façon stable pour une correspondance produit (5 sujets).

2/ La forme des timbres n'est jamais utilisée dans une correspondance produit.

3/ 5/15 seulement des sujets utilisent une relation partielle suivant un critère homogène (la couleur).

Donc :

- d'une part ce n'est pas l'inversion de critère en elle-même qui est responsable des échecs mais la très grande difficulté à utiliser la forme dans la décomposition des timbres.

- d'autre part, la double décomposition (celle des timbres et celle des plots) nécessitée par la correspondance produit est très difficile (5 sujets sur 15 peuvent l'utiliser), alors qu'une décomposition simple (celle des timbres) est possible quand l'autre (celle des plots) a été donnée dans la situation expérimentale (même si elle n'est pas toujours réussie au premier essai).

. <u>Groupe II</u> (CE2 : moyenne d'âge 8;4 ans)

Le tableau suivant, GII_1, donne les relations entre les réponses à la première correspondance produit et les réponses à la correspondance complémentaire éventuelle.

<u>Tableau GII_1</u>

	Epreuve complémentaire						
	F			C			
1ère décompos.	E	F → F'	C → F'	E	C → C'	F → C'	Σ
C ⟶ C'			4				4
C ⟶ F'							0
F ⟶ F'						1	1
F ⟶ C'				1			1
TOTAL	0	0	4	1	0	1	6

Sur les 6 inversions de critère à effectuer, (4 couleurs et 2 formes) aucune n'a donné lieu à une réussite spontanée.

5/6 des sujets ont gardé leur première décomposition des timbres - 4 suivant la couleur, 1 suivant la forme.

Le tableau suivant GII_2, donne la répartition des réponses à la correspondance produit finale :

Tableau GII_2

	E	C → C'	F → F'	F → C'	Σ
Nbre de sujets	1	5	1	1	8

La différence la plus marquante avec le groupe d'âge précédent est la capacité des sujets de 8;4 à coordonner les décompositions respectives des timbres et des plots pour une correspondance cohérente entre eux (7/8 réussites), le critère "couleur" reste cependant privilégié, quoique peut-être moins nettement que dans le groupe I.

. Groupe III (CM1 : moyenne d'âge 9;5 ans)

Le tableau $GIII_1$ donne les relations entre les réponses à la première correspondance produit et les réponses à la correspondance complémentaire éventuelle (1).

(1) 4 sujets n'ont pas passé l'épreuve complémentaire au sens que nous avons défini ici (déterminée par la décomposition initiale des timbres) mais celle qui correspondait à la décomposition des plots, et n'est donc pas utilisable dans notre analyse des résultats.

Tableau $GIII_1$

	Epreuve complémentaire						
	F			C			
1ère décompos.	E	F → F'	C → F'	E	C → C'	F → C'	Σ
C → C'	1	1	1				3
C → F'	0	1	0				1
F → F'				0	7	0	7
F → C'				0	0	0	0
TOTAL	1	2	1	0	7	0	11

9/11 des sujets utilisent spontanément la deuxième décomposition des timbres dans la correspondance unidimensionnelle complémentaire.

1/11 garde le même critère.

1/11 échoue à la correspondance complémentaire (spontanée).

Nous obtenons donc la réussite au changement de critère dans la décomposition des timbres.

Le tableau $GIII_2$ donne la répartition des réponses à la correspondance produit finale :

Tableau $GIII_2$

E	C → C'	C → F'	F → F'	F → C'	Σ
1	3	2	10	0	16

Nous observons que :

- 15/16 des sujets utilisent la double décomposition des timbres et des plots pour déterminer une correspondance complète.

- 2 sujets seulement utilisent une décomposition "mixte" : la couleur pour les timbres, la forme pour les plots.

Les différences avec le groupe d'âge précédent sont :

- l'inversion du privilège de la couleur sur la forme (à 8;4) en un privilège de la forme sur la couleur,

- la réussite au changement de critère imposé par la correspondance complémentaire dans ce groupe d'âge.

. <u>Groupe IV</u> (moyenne d'âge : 10;7 ans)

Le tableau GIV_1 donne les relations entre les réponses spontanées à la première correspondance produit et les réponses à la correspondance complémentaire.

<u>Tableau GIV_1</u>

1ère décompos.	E	F F'	C F'	E	C C'	F C'	Σ
C C'							0
C F'							0
F F'					4	1	5
F C'					0	2	2
TOTAL	0	0	0	0	4	3	7

4/7 des inversions de la forme vers la couleur sont réunies,

3/7 des réponses correspondant encore à la décomposition des timbres suivant la forme.

Le tableau GIV_2 donne le résultat de la correspondance produit finale :

Tableau GIV_2

E	C → C'	C → F'	F → C'	F → F'	R	Σ
0	0	0	3	4	1	8

La dissymétrie en faveur de la forme (pour les timbres) est encore plus marquée que dans le groupe précédent.

Le nombre de réussite est très faible mais dans une épreuve supplémentaire dont la consigne propose de trouver une solution "maximale" (en demandant "ce qui va le mieux"), une grande partie des sujets arrive à une correspondance produit correcte.

9.4. BILAN DES RESULTATS

L'asymétrie d'utilisation des dimensions est très importante. La couleur apparaît d'abord comme la seule dimension disponible pour établir des hypothèses de correspondance entre produits formes x couleurs. Les enfants de CP comme ceux de CE2 échouent à changer de critère : ils donnent des réponses incompatibles avec les données initiales, alors que pour les enfants plus âgés (CM1 et CM2) la seconde dimension peut être mobilisée pour construire une correspondance unidimensionnelle, néanmoins la dimension spontanément disponible reste utilisée pour la correspondance produit où les réponses unidimensionnelles sont dominantes.

Par rapport aux hypothèses en débat, ces résultats apportent les éléments suivants :

- les enfants les plus jeunes n'utilisent pour faire des hypothèses qu'une dimension dominante (ici la couleur), l'autre dimension n'étant pas mobilisable : il existe bien une difficulté d'analyse fonctionnelle du matériel expérimental F x C ;

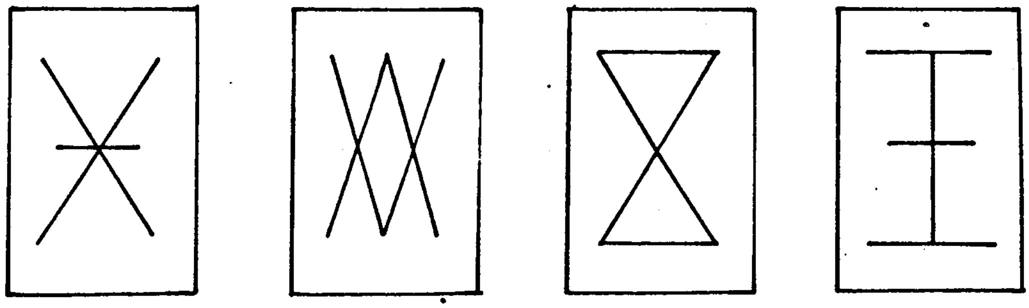
- les enfants plus âgés font des hypothèses unidimensionnelles selon une dimension dominante qui est seule spontanément utilisée dans le type de tâche proposée, bien que l'autre dimension soit mobilisable.

Ce n'est donc pas la possibilité d'analyse du matériel selon les 2 dimensions forme et couleur qui est en cause dans l'échec à établir des hypothèses bidimensionnelles.

L'évolution porterait donc fortement sur le statut relatif des dimensions, du point de vue fonctionnel. Lorsque les deux dimensions deviennent accessibles pour établir des hypothèses sur la "règle du jeu" implicitement établie par l'expérimentateur, il n'en reste pas moins une forte hiérarchie dans leur accessibilité.

L'existence de relations "mixtes" (contradictoires avec les données) indique que les 2 dimensions F et C ne sont pas nécessairement traitées comm des dimensions communes uniques pour chacun des matériels timbres et plots.

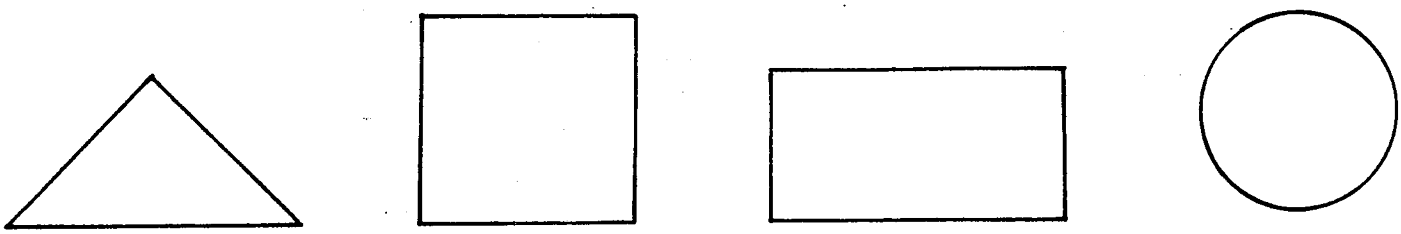
La question reste ouverte, pour les enfants les plus âgés (CM), de savoir s'il y a une difficulté propre à "multiplier" des correspondances unidimensionnelles ou si la situation expérimentale construite n'impose pas des hypothèses bidimensionnelles pour apporter une solution au problème proposé aux enfants.



Ensemble des 4 formes utilisées pour F
(formes non significatives)

Figure 1a

Ensemble des 4 couleurs utilisées pour C :
bleu "éteint", gris, marron, violet



Ensemble des 4 formes utilisées pour F'
(formes significatives)

Ensemble des 4 couleurs utilisées pour C' :
vert, jaune, rouge, noir

Figure 1b

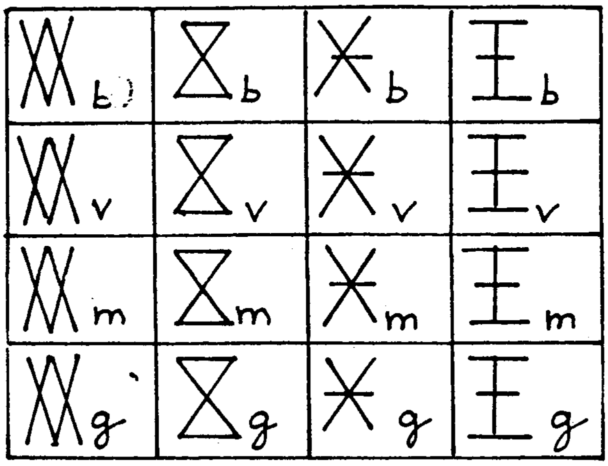


fig. 2

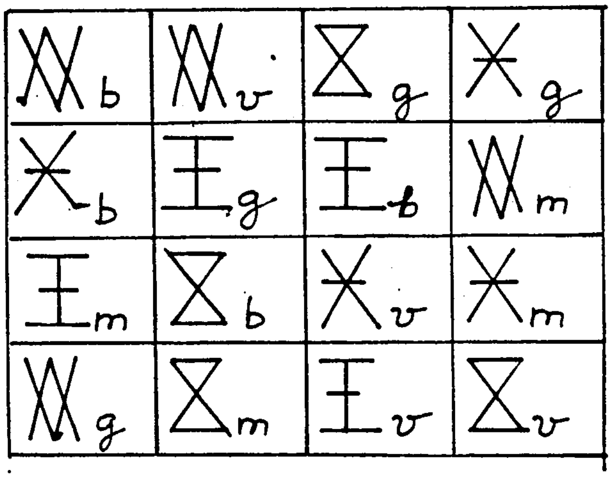


fig. 3

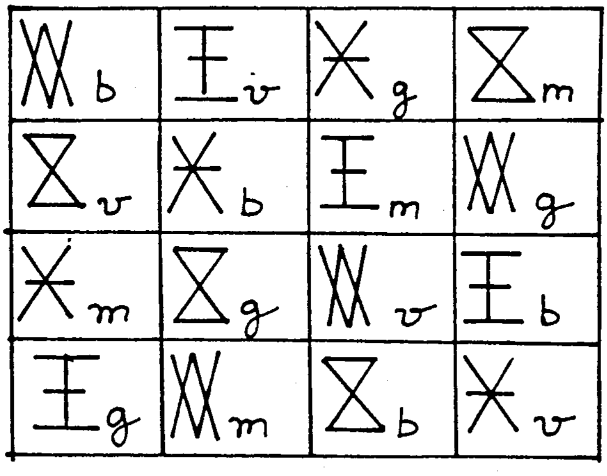


fig. 4

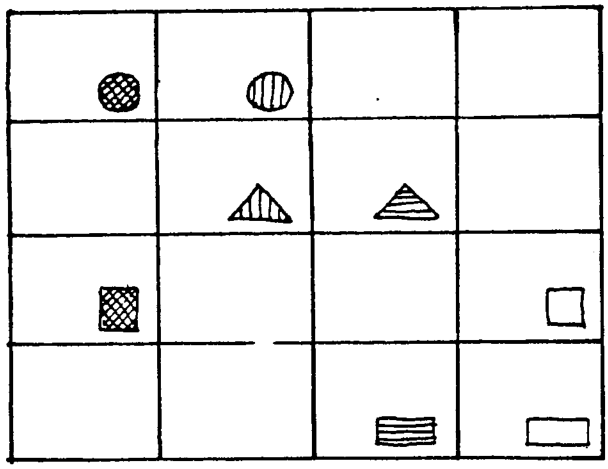


fig. 5

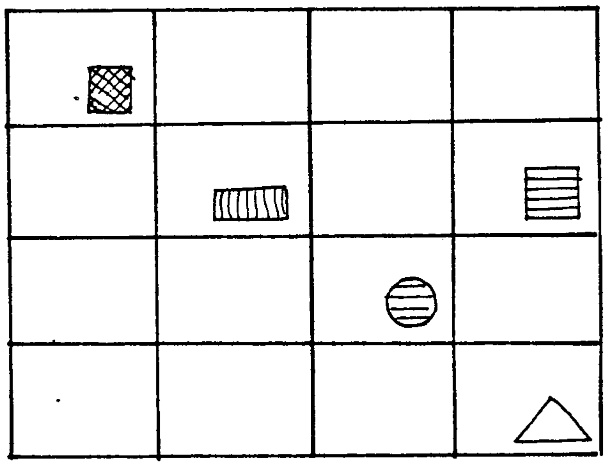


fig. 6

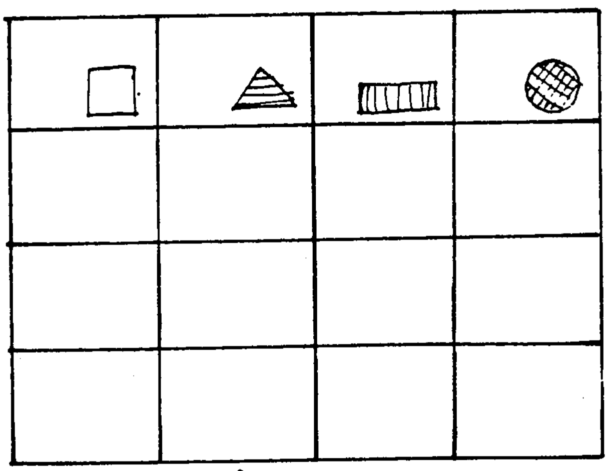


fig. 7

10. Mise en correspondance d'étiquettes (F x C) et de dominos (Ag x Ad)

La seconde expérience de correspondance produit (timbres et plots) a confirmé pour les sujets jusqu'à 8-9 ans, l'existence de difficulté d'une analyse bidimensionnelle de matériels produit qui soit fonctionnelle dans la production d'hypothèses ; cette difficulté n'existe pas pour les enfants de plus de 9 ans (CM), mais les dimensions apparaissent fortement hiérarchisées dans leur disponibilité, à savoir pour construire des hypothèses. Le problème de la constitution des hypothèses bidimensionnelles est resté ouvert dans la mesure où le problème de correspondance posé aux enfants était complètement ouvert, et où aucun feed-back n'est fourni aux enfants quant à la validité de leurs réponses.

L'expérience qui suit est construite pour poser un problème dont l'enfant sait qu'il a une solution univoquement déterminée ; elle comporte une phase où à chaque réponse l'enfant peut comparer son hypothèse (et sa réponse) et la réalité de la correspondance entre éléments des matériels produits.

Enfin, la situation de correspondance produit est proposée après l'établissement possible indépendant des relations unidimensionnelles "multipliées" dans la correspondance produit : cela doit permettre d'apprécier les difficultés propres à la "composition" bidimensionnelle des hypothèses.

°

° °

DOMINOS ET ETIQUETTES "F x C"

10.1. Matériel expérimental et déroulement de l'expérience

Le matériel expérimental se compose d'un ensemble de 9 boîtes isomorphe à un produit de 3 formes par 3 couleurs (respectivement : carreaux, pique, trèfle, et bleu, rouge, noir) et d'un ensemble de 9 dominos (un par boîte) isomorphe à un produit $A_g \times A_d$, où A_g et A_d sont deux ensembles disjoints représentant des animaux.

Les dominos sont disposés dans les boîtes de sorte que la couleur de la boîte détermine l'animal de A_d et la forme de la boîte détermine l'animal de Ag.

L'expérience consiste à faire déterminer par le sujet soit l'animal de gauche, soit l'animal de droite, soit les deux, sur les dominos qui sont dans 5 boîtes fermées, successivement présentées au sujet, les 4 autres boîtes étant ouvertes devant lui de manière à ce que la détermination demandée soit possible de façon unique.

Le déroulement de l'expérience est le même que celui de l'expérience analogue "boîtes de dominos", pour laquelle les boîtes sont définies par un couple de couleurs.

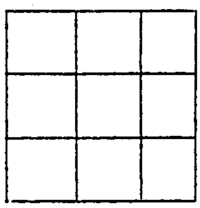
Lorsque l'animal à trouver est déterminé par la couleur de la boîte qui le contient, nous disons que la relation à déterminer est la relation "couleur", souvent notée simplement "C" ; de manière analogue nous parlons de la relation "forme", et nous la notons "F". Lorsque le sujet doit déterminer les deux animaux situés dans chaque boîte nous disons que la relation à déterminer est la relation "produit".

Chaque sujet doit au cours de l'expérience déterminer successivement deux relations simples, puis la relation produit, l'ordre de détermination de la relation "couleur" et de la relation "forme" est balancé entre les groupes de sujets pour chacun des âges considérés.

11.10.2. Déroulement d'une expérience

Préliminaire

1/ Présentation des boîtes et du tableau où elles sont rangées; "sur chaque boîte il y a un dessin de couleur. Le dessin est un trèfle, un pique ou un carreau, la couleur est vert (bleu), rouge ou noir. Sur ce tableau il y a la même chose, tu vas d'abord mettre chaque boîte à sa place".

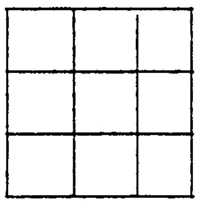


noter
+ si la boîte est correcte
F si la forme est correcte
C si la couleur est correcte
- si les deux sont faux

Si tout est correct, on dit "bon" et on passe à la suite. Sinon on fait refaire en corrigeant les 3 premières boîtes ; on note les autres et quel que soit le résultat on dit "bon" et on passe à la suite.

Présentation des dominos

"Sur chaque domino il y a deux animaux ; de ce côté-ci il y a un rat, un castor ou un renard, de ce côté-là un mouton, un cochon ou une chèvre. Sur ce tableau il y a les mêmes dominos. Tu vas d'abord mettre chaque domino à sa place".



noter
+ si le domino est correct
1 si l'animal à gauche est correct
2 si l'animal à droite est correct
- si les 2 sont faux

Si tout est correct on passe à la suite, sinon on refait faire en corrigeant les 3 premiers dominos et en notant les autres. Quel que soit le résultat on dit "bon" et on passe à la suite.

Si l'enfant utilise une autre dénomination pour les formes, les couleurs ou les animaux on reprend son propre terme sans commentaire.

Si un sujet échoue complètement aux deux épreuves préliminaires, et à la première épreuve de l'expérience proprement dite, on lui dit "c'est bien" et on ne lui fait pas passer la suite.

Expérience

A) "Dans chaque boîte il y a un domino comme ceux-là..
En regardant bien l'étiquette de la boîte, tu dois deviner quel animal il y a de ce côté-ci dans les autres boîtes. Tu me dis pour chaque boîte si c'est un rat, un renard ou un castor. Quand tu auras dit pour toutes les boîtes on le refera et tu pourras regarder si tu as deviné juste ou non".

Après avoir fait passer une fois sans vérification puis une fois avec, on demande à l'enfant "s'il sait dire le truc pour deviner juste".

B) "Tu vas deviner maintenant les animaux qui sont de l'autre côté. Je t'en montre et toi tu dois deviner ceux qui sont dans les boîtes fermées. Tu me dis pour chaque boîte si c'est un cochon, une chèvre ou un mouton. Quand tu auras dit pour toutes les boîtes, on le refera et tu pourras regarder si tu as deviné juste".

Comme précédemment, on demande à l'enfant "s'il sait dire le truc pour deviner juste".

Si le sujet veut utiliser le même truc que pour A, on lui signale "que ce n'est pas le même truc que tout à l'heure et on lui fait recommencer B.

Si le sujet a échoué à A et B successivement, on lui fait recommencer A.

Si le temps passé dépasse 1/2 heure, on dit que c'est très bien et on ne fait pas passer C, de même si les trois épreuves (A, B, A) sont échouées.

C) "Tu vas maintenant deviner le domino tout entier qu'il y a dans chaque boîte fermée ; tu regardes bien l'étiquette et tu me dis l'animal qu'il y a de ce côté-ci et celui de ce côté-là. On le refera une deuxième fois et tu pourras regarder si tu as deviné juste".

Sujets

Un ensemble de 76 sujets de 5;9 à 10;9 ans, élèves d'écoles primaires, a passé l'expérience. Ces sujets se répartissent en 5 groupes d'âge, et dans chacun de ces groupes d'âge en deux sous-groupes, l'un où la relation "couleur" est déterminée en premier (groupes C1) et l'autre où la relation "forme" est déterminée en premier (groupe F1).

Groupe 1 (CP) : 17 Ss de 5;9 à 6;8 moy. 6;3
sous-groupes C1 : 6 Ss de 6; à 6;7 moy. 6;4
F1 :11 Ss de 5;9 à 6;8 moy. 6;3

Groupe 2 (CE1): 15 Ss de 6;10 à 8;1 moy. 7;7
sous-groupes C1 : 6 Ss de 7;3 à 8;1 moy. 7;7
F1 : 9 Ss de 6;10 à 8; moy. 7;7

Groupe 3 (CE2): 15 Ss de 8; à 8;11 moy. 8;5
sous-groupes C1 : 7 Ss de 8; à 8;11 moy. 8;5
F1 : 8 Ss de 8 à 8;10 moy. 8;5

Groupe 4 (CM1): 14 Ss de 8;6 à 10;1 moy. 9;2
sous-groupes C1 : 7 Ss de 8;6 à 10;1 moy. 9;2
F1 : 7 Ss de 8;7 à 9;7 moy. 9;2

Groupe 5 (CM2): 15 Ss de 9;10 à 10;9 moy. 10;4
sous-groupes C1 : 8 Ss de 9;10 à 10;9 moy. 10;4
F1 : 7 Ss de 10; à 10;9 moy. 10;4

Les sous-groupes ne sont pas exactement équilibrés (le biais pour 1 et 2 et 3 est toujours en faveur du sous-groupe des sujets passant la relation "forme" en premier) mais nous verrons dans l'analyse des résultats que les effets de l'ordre de passation sont suffisamment nets pour que ce déséquilibre ne pose pas de problème important pour l'analyse.

1.03. Mode d'analyse des résultats

Les deux épreuves de construction de relations déterminées par une seule des deux dimensions forme et couleur sont isomorphes. Pour faire apparaître clairement cet isomorphisme, y compris au niveau des différentes analyses que nous allons effectuer, nous avons donné une numérotation à chacun des ensembles d'animaux (Adet Ag) qui est la suivante :

$$\text{Ag} \left\{ \begin{array}{l} \text{rat} = 1 \\ \text{renard} = 2 \\ \text{castor} = 3 \end{array} \right. \qquad \text{Ad} \left\{ \begin{array}{l} \text{chèvre} = 1 \\ \text{mouton} = 2 \\ \text{cochon} = 3 \end{array} \right.$$

Les correspondances rg et rd se notent alors :

$$\text{rg} \left\{ \begin{array}{l} \text{pique} \longleftrightarrow 1 \\ \text{trèfle} \longleftrightarrow 2 \\ \text{carreau} \longleftrightarrow 3 \end{array} \right. \qquad \text{rd} \left\{ \begin{array}{l} \text{rouge} \longleftrightarrow 1 \\ \text{noir} \longleftrightarrow 2 \\ \text{bleu} \longleftrightarrow 3 \end{array} \right.$$

L'ordre de présentation des boîtes est lui aussi le même (avec la numérotation adoptée) pour les deux relations.

Cette numérotation va nous servir à définir divers patterns de réponse, ainsi qu'à effectuer l'analyse des résultats.

Toutes les analyses correspondent au découpage suivant de l'expérience :

- nous appellerons item la donnée d'une boîte à laquelle il faut associer un animal ou un couple d'animaux ;

- nous appellerons réponse élémentaire la réponse d'un animal ou d'un couple d'animaux correspondant à une boîte ;

- nous appellerons essai l'ensemble des 5 items correspondant aux 5 boîtes pour lesquelles le sujet doit fournir une réponse.

Les essais sont de deux types :

- essai spontané, "S" : le sujet répond à chacune des 5 boîtes données. Chaque item comporte la donnée d'une boîte - d'une réponse élémentaire - pas de feed back sur le fait que la réponse est correcte ou non ;

- essai avec "vérification", "V" : après chacune de ses réponses, le sujet voit l'animal correspondant à la bonne réponse ; chaque item comporte donc : la donnée d'une boîte - une réponse élémentaire - une vérification.

Pour chaque essai nous appellerons réponse globale, l'ensemble des 5 réponses élémentaires.

Nous appellerons épreuve l'ensemble des 2 essais "spontanés" et "avec vérification" correspondant à une même relation à trouver.

Nous avons analysé tout d'abord les réussites globales pour les différents essais : essais "simples" (A et B) où le sujet doit, à chaque item, déterminer un animal et essais "produits" où le sujet doit déterminer le couple d'animaux qui est dans une boîte.

Nous avons défini la réussite à en essai comme une réponse à 4 sur 5 des items. Nous devons faire une remarque méthodologique concernant ce choix : pour les essais avec vérification il est clair que le premier item ne saurait se différencier des items de l'essai précédent sans vérification, c'est à partir du 2ème item que la vérification effectuée sur la première réponse peut apporter des informations à l'enfant quant à ses hypothèses. Lorsqu'il y a réussite selon notre critère pour l'essai avec vérification, il s'agit pratiquement toujours des 4 derniers items. Le fait d'avoir un critère plus large que la réussite aux 4 derniers items ne peut alors jouer que dans un sens : augmenter éventuellement le nombre des réussites pour l'essai sans vérification. Si avec ce critère, nous obtenons une plus grande difficulté pour cet essai (ce que nous attendons) nous pouvons conclure que pour l'essai avec vérification, cela ne peut que renforcer la plausibilité de notre hypothèse.

Nous avons ensuite analysé de façon plus approfondie la nature des réponses fournies. Pour cela, nous construisons un modèle simple, qui suppose l'existence de 3 types d'hypothèses liées à la structure du matériel ou l'absence d'hypothèses. Nous calculons des répartitions attendues de réponses, en les identifiant aux probabilités et nous les comparons aux répartitions effectives observées.

C'est une utilisation du modèle qui pose des problèmes méthodologiques certains puisque nous travaillons ici avec un petit nombre de réponses et que nous ne sommes donc pas dans les conditions d'application des théorèmes de convergence..). Néanmoins, une analyse en terme de compatibilité nous semble apporter des informations complémentaires sur l'existence et la stabilité d'hypothèses liées à la structure du matériel, selon la nature des essais.

10.4. RESULTATS D'ENSEMBLE

10.4. 1. Les pourcentages de réussites globales des différents essais "simples" sont très dispersées étant donné le petit nombre de sujets des différents groupes. Il se dégage néanmoins un certain nombre d'invariants :

- les essais où le critère pertinent est la forme sont mieux réussis, pour les mêmes sujets que ceux où le critère est la couleur (la seule exception concerne les essais FV1 et CV2 en CE1) avec un écart de 1 sujet !) ;

- les essais avec vérification sont mieux réussis que les essais "spontanés" correspondant à la réponse initiale à chacun des problèmes de correspondance

- il y a une amélioration des réponses du CM1 au CM2 pour toutes les situations.

En revanche, du CP au CE2, les comportements apparaissent peu réguliers avec des régressions apparentes, soit du CP au CE1, soit du CE1 au CE2).

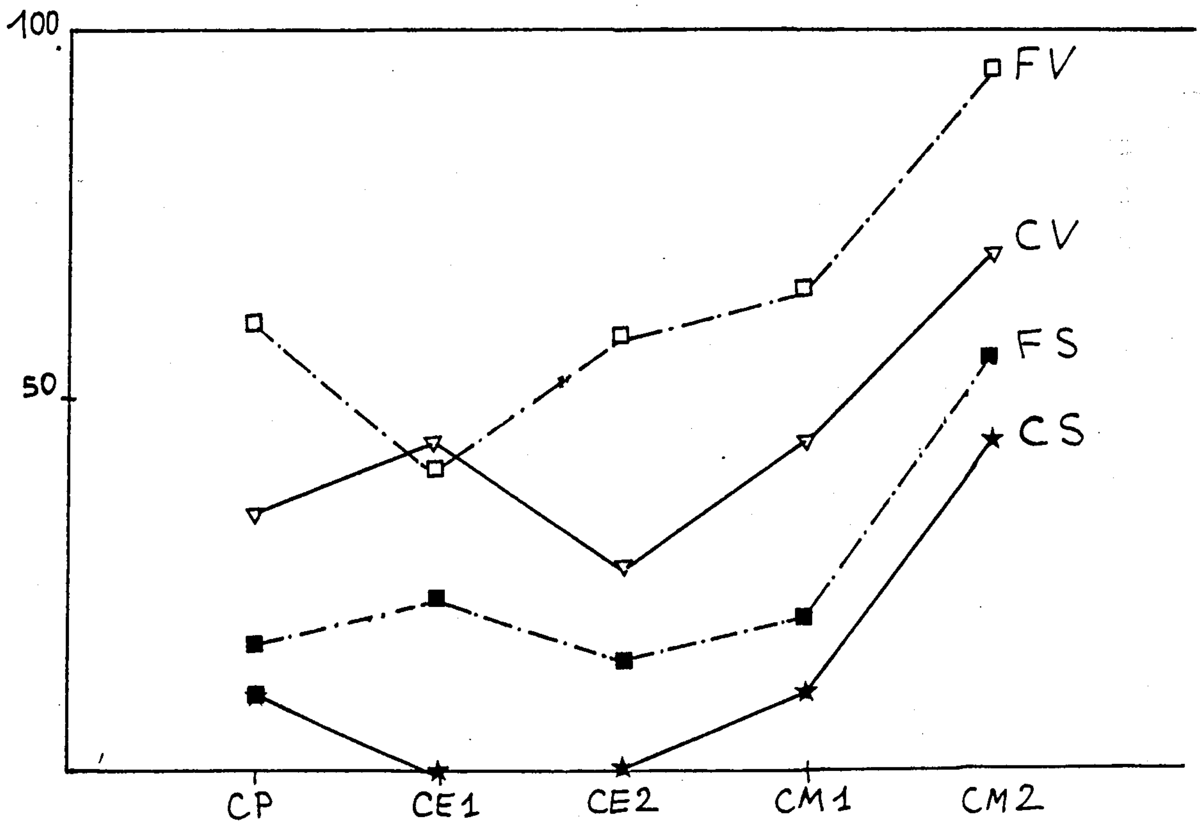


Figure 9

La figure 9 établie en regroupant les résultats des différents essais compte non tenu de l'ordre de passation rend compte de ces invariants.

10.4.2. Résultat (sur l'ensemble des sujets de chaque classe), pour des correspondance produit $F \times C \longrightarrow A_g \times A_d$

suivant des correspondances "simples" :

"F" : $F \times C \rightarrow A$

"C" : $F \times C \rightarrow A$

a) 1/ <u>Essai sans vérification : "spontané"</u>

(pas d'information sur la "bonne réponse", c'est-à-dire le domino dans la boîte)

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Ø	29	38	57	46	29
C	28	31	-	15	7
F	43	31	36	31	36
F & C	-	-	7	15	29
N*	14(82%)	13(87%)	14(93%)	13(93%)	14(93%)
N	17	15	15	14	15

b) <u>Essai avec vérification pour l'ensemble des sujets</u>

(nombre de sujets : entre parenthèses)

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Ø	50(7)	38(5)	64(9)	38(5)	28(4)
C	21(3)	31(4)	-	15(2)	7(1)
F	29(4)	23(3)	21(3)	38(5)	21(3)
F&C	-	7(1)	14(2)	7(1)	43(6)
N*	14	13	14	13	14
N	17	15	15	14	15

N* = nombre de sujets ayant passé l'expérience complète - dont cette épreuve "S"

N = nombre de sujets ayant participé à l'expérience.

On peut constater le très faible pourcentage de réponses bidimensionnelles correctes en proportion des pourcentages de réponses unidimensionnelles correctes dans les derniers essais (avec vérification).

En effet, si on considère les essais avec vérification, en regroupant les réponses de chaque dimension - on obtient les résultats suivants :

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	
F	6 + 4 $\boxed{63}$	4 + 2 $\boxed{40}$	6 + 3 $\boxed{60}$	4 + 5 $\boxed{64}$	7 + 7 $\boxed{93}$	
C	2 + 4 $\boxed{38}$	1 + 5 $\boxed{40}$	3 + 1 $\boxed{27}$	3 + 3 $\boxed{43}$	4 + 6 $\boxed{67}$	
N	16	15	15	14	15	

Globalement il apparaît bien y avoir une difficulté intrinsèque à composer multiplicativement deux relations déjà obtenues, c'est-à-dire en fait ici à composer deux hypothèses cohérentes quant à la dépendance entre F x C et $A_g \times A_d$.

Une étude sujet par sujet des couples de réponses pour les essais simples et l'essai produit (situations "avec vérification") précise ces décalages : le tableau suivant donne la répartition des réponses produits des sujets ayant correctement établi les correspondances simples (pour les essais avec vérification).

	CP	CE1	CE2	CM1	CM2	
+	-	1	-	1	6	8
F	1	0	2	2	2	7
C	1	2	-	1	1	5
-	3	2	-	3	2	10
(F+C)	5	5	2	7	11	30
N	14	13	14	13	14	68

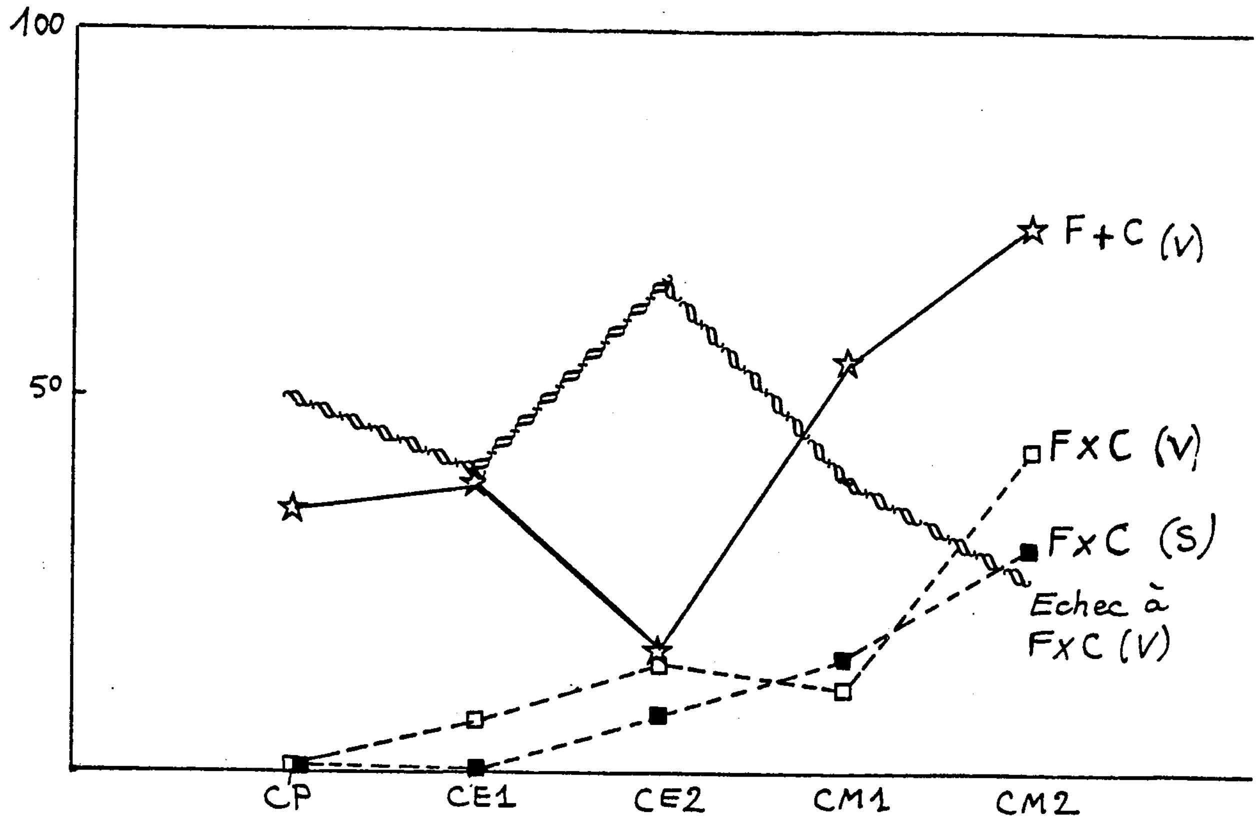


fig. 10

La figure 10 montre l'évolution des correspondances produits (F x C) données pour les essais sans vérification (S) et avec vérification (V), comparée à l'évolution des réponses correctes séparément pour l'une et l'autre des dimensions (F + C). Les échecs complets à pouvoir traiter indépendamment et simultanément deux relations "simples" lors du dernier essai (F et C avec vérification) montrent une évolution inverse de celle de "F x C".

Jusqu'au CM2, la majorité des sujets qui ont séparément pu établir une correspondance appropriée (donc avec un changement de critère entre les épreuves forme et couleur) entre une des dimensions et les animaux de l'un des côtés des dominos, échoue à coordonner les hypothèses faites séparément. Cela se traduit même par l'impossibilité à faire des hypothèses unidimensionnelles cohérentes (donnant l'un des animaux du domino).

La forme apparaît comme la dimension qui fournit le plus d'hypothèses stables (pour 18 sujets c'est même la seule dimension utilisée de façon cohérente - pour les correspondances compatibles, bien entendu), alors qu'un seul sujet utilise exclusivement la dimension couleur en CE1 -

10.4.3. Effets de l'ordre de passation des épreuves "forme" et "couleur" sur la nature des réponses

Nous appelons FS1 l'essai spontané pour la relation "forme" présentée au sujet comme première relation unidimensionnelle. De manière analogue, CS1 désigne l'essai spontané pour la relation "couleur" présentée en premier. FV1 et CV1 désignent les essais avec vérification, pour la même condition de passation (quant à l'ordre "F" et "C").

FS2, CS2, FV2 et CV2 désignent les essais correspondants, lorsque les relations unidimensionnelles "forme" ou "couleur" sont présentées comme seconde relation unidimensionnelle.

Pour étudier le rôle respectif des dimensions nous considérons les patterns de réponses compatibles avec l'hypothèse correcte (dépendance de la dimension pertinente, pattern P+), les patterns compatibles avec l'hypothèse antagoniste (dépendance de la dimension non-pertinente : contradiction avec les données ; pattern P-) et les patterns correspondance à une ressemblance selon une quelconque dimension (Pm). Les patterns restant sont classés Po.

Les tableaux qui suivent donnent la répartition des patterns P+, P-, Pm (et Po) pour les différents essais, pour chacune des dimensions pertinente, selon l'ordre de passation de l'épreuve.

Effet de la succession des épreuves :

A - Essais spontanés

. 1ère épreuve/2ème épreuve pour la relation "forme"
Répartition globale des réponses

	P+	P-	Pm	P_o	TOTAL
FS_1	14	2	10	16	42
FS_2	5	14	5	10	34
	19	16	15	26	76

La première épreuve "forme" diffère très significativement de la 2ème, en particulier le nombre des réponses correctes y est notablement plus élevé. (X^2 = 20, 3 ; dl = 3 ; $p < .001$)

. 1ère épreuve/2ème épreuve pour la relation "couleur"

	P+	P-	Pm	P_o	TOTAL
CS_1	4	12	10	8	34
CS_2	3	24	6	9	42
	7	36	16	17	

La différence est faible, bien que le nombre de réponses P- soit plus élevé pour la 2ème épreuve.
(X^2 = 4,1 dl = 3) NS)

B - Essais avec vérification

. 1ère épreuve/2ème épreuve pour la relation-forme

	P+	P-	Pm	P_o	TOTAL
FV_1	27	0	9	6	42
FV_2	21	2	8	3	34
	48	2	17	9	76

La différence entre la 1ère et la 2ème épreuve est peu marquée (X^2 = 3,5 dl = 3:NS), bien que le nombre des réponses P- soit plus nombreux dans la 2ème épreuve.

. 1ère épreuve/2ème épreuve pour la relation-couleur

	P_+	P-	Pm	Po	Total
CV_1	13	0	15	6	34
CV_2	19	0	13	10	42
	32	0	28	16	76

Nous remarquons :

a) pour chacune des relations la différence suivant l'ordre de passation est marquée pour l'essai spontané, non significative pour l'essai après vérification.

b) pour la relation-forme, la différence est beaucoup plus marquée que pour la relation "couleur", c'est d'ailleurs seulement pour l'essai spontané de la relation forme que la différence entre 1er et 2ème épreuve est très significative.

Les différences pour les essais spontanés portent pour l'essentiel sur l'utilisation de l'hypothèse "antagoniste" : les reprises suivant la couleur données lorsque la relation forme est présentée en 2ème épreuve sont beaucoup plus nombreuses que lorsque la forme est présentée en première épreuve (14/34 contre 2/42).

La répartition des réponses "correctes" et "antagonistes" est d'ailleurs presque la même pour la relation couleur passée en première épreuve et la relation forme passée en deuxième épreuve (pour les essais spontanés). Il n'en est pas cependant de même lorsque les vérifications sont effectuées : les réponses correctes pour la relation-forme en deuxième épreuve sont meilleures que celles pour CV_2 (21 contre 13).

10.5. Conclusion

Nous observons donc :

a) un effet de l'ordre de passation, davantage marqué pour la relation forme que pour la relation couleur, pour l'essai "spontané", c'est-à-dire sans vérification des réponses dans le sens de l'utilisation en deuxième épreuve de l'hypothèse de la première épreuve (devenue antagoniste).

b) pas d'effet de l'ordre de passation pour les essais avec vérification, en particulier en ce qui concerne les réponses correctes.

c) une interaction entre l'ordre de passation et le type de relation à établir : l'hypothèse de dépendance de la forme étant prioritaire lors de la première épreuve (pour la relation couleur elle-même), il n'y a guère de différence due à l'ordre de passation de l'épreuve en ce qui concerne la relation couleur alors que pour la relation forme, cette priorité est perdue, à l'essai spontané, en faveur de l'hypothèse préalablement établie, à savoir, la détermination de la réponse par la couleur.

Cependant, dès qu'il y a vérification, cet effet disparaît, la relation couleur restant d'ailleurs moins bien réussie que la relation forme (19/42 contre 21/34).

L'annexe qui suit analyse les systèmes de réponses et en particulier l'existence et la nature des hypothèses de dépendance entre les ensembles F ou C et Ag ou Ad. Les hypothèses unidimensionnelles stables spontanées (correctes ou contradictoires avec les données) sont minoritaires jusqu'en CM2. Elles sont mobilisables lors des essais avec vérification, dont un premier effet est la disparition des hypothèses unidimensionnelles contradictoires. Cependant les contradictions entre une hypothèse correcte préalablement établie et l'essai en cours, avec vérification restent difficiles à résoudre jusqu'au CM2, en particulier lorsque c'est la forme qui a déterminé la "bonne" hypothèse unidimensionnelle. Ce phénomène est le plus nettement marqué en CE2.

Il apparaît donc plusieurs difficultés d'ordre différent : la constitution d'une hypothèse unidimensionnelle (mobilisable seulement au dernier essai avec vérification, par une - petite - majorité d'enfants de CP) ; la mise en rapport de cette hypothèse avec l'ensemble des données ; le changement approprié d'hypothèse unidimensionnelle qui exige la vérification, pose problème jusqu'au CM1 et n'est acquis pour les deux dimensions qu'en CM2.

A N N E X E

ETUDE DES HYPOTHESES ET DE LEUR STABILITE DANS LES DIFFERENTS ESSAIS

Analyses effectuées

Les analyses sont effectuées essai par essai, pour chaque épreuve. Elles sont de deux sortes, non indépendantes mais convergentes :
- sur l'ensemble des sujets, une analyse faite item par item - pour chaque essai - en cherchant si on peut supposer qu'il y a à chaque item une répartition des sujets en 4 groupes, chacun correspondant à une hypothèse (ou absence d'hypothèse) sur le type de relation entre boîtes et dominos.

- pour chaque essai une analyse des patterns de réponses, liées aux hypothèses précédemment définies, effectuées sur l'ensemble des âges.

La comparaison des deux analyses permet de juger de la stabilité des réponses sur l'ensemble des items, cela pour chaque type d'essai et chaque relation (selon la forme, ou selon la couleur).

Les comparaisons entre les essais portant sur la relation "forme" et ceux portant sur la relation "couleur" permettent d'analyser l'influence de la nature des dimensions en jeu sur l'existence et les propriétés des hypothèses que font les sujets.

Les comparaisons entre essais "spontanés"et essais "avec vérification" montrent en quoi la vérification influence le système des réponses, à partir de l'évolution des hypothèses.

La comparaison selon l'ordre dans lequel sont passées les épreuves permet d'étudier comment s'effectuent des transferts éventuels d'une dimension à l'autre.

Toutes les analyses et comparaisons effectuées portent sur l'existence et l'utilisation de systèmes cohérents de réponses, définis à partir d'hypothèses liées à l'analyse bidimensionnelle (forme x couleur) du matériel expérimental, sur l'ensemble des sujets.

A - Analyse des premières épreuves

1. Analyse des réponses sur l'ensemble des sujets pour les essais spontanés

Les deux tableaux suivants donnent la répartition des réponses (pour l'ensemble des sujets) à chacune des boîtes présentée lors du premier essai spontané (1). (réponses élémentaires)

---

(1) Nous rappelons que les essais concernant forme et couleur sont définis par le même codage aussi bien pour les boîtes présentée que pour les réponses des sujets.

FS_1 donne la répartition (codée en réponse 1, 2 ou 3) des réponses pour la relation définie par la forme.
CS_1 pour la relation définie par la couleur.
Le nombre total des réponses pour chaque item est N = 42.

F S_1

Nbre de réponses	Boîtes	1	2	3	4	5
	1	24	11	12	9	11
	2	8	11	7	25	22
	3	10	20	23	8	9

C S_1

	Boîtes	1	2	3	4	5
Nbre de réponses	1	13	15	24	20	4
	2	2	9	4	9	10
	3	19	10	6	5	20

Nous rappelons que le pattern correct est (1, 3, 3, 2, 2) pour l'essai spontané.

Dans l'essai FS_1 la moitié des réponses pour chaque item, est compatible avec l'existence d'une hypothèse correcte de dépendance selon la forme.

Dans l'essai CS_1 très peu de réponses sont correctes (entre 6 et 13). Pour analyser cette répartition des réponses en fonction des 2 situations et en fonction des items de chacune nous allons définir un ensemble d'hypothèses sur l'utilisation des dimensions forme et couleur dans la détermination d'une réponse.

Définition des hypothèses possibles, liées au matériel : Ho, H+, H-, Hm

. Réponse selon "l'hypothèse vide" notée Ho

La réponse selon "l'hypothèse vide", Ho, est - par définition de Ho - indépendante des relations entre boîtes et dominos qu'on peut définir à partir de la correspondance initiale entre (4) boîtes et (4) dominos.

De plus, nous posons comme postulat que les <u>réponses 1, 2 ou 3 sont équiprobables</u> (1) sous cette hypothèse

Soit P (ri(2) = 1) = 1/3 si H_0 est faite pour l'item i
P (ri = 2) = 1/3
(ri = 3) = 1/3

. <u>Réponse selon l'hypothèse correcte H+</u>

L'hypothèse correcte, notée H+, est celle de la dépendance (déterminée) de la réponse selon :

- la forme F de la boîte (si la correspondance partielle donnée au sujet est déterminée par la forme),
- la couleur C (si la couleur est déterminante),

Sous l'hypothèse H+, les probabilités de réponses aux items successifs sont résumées par :

p $(r_1 = 1) = 1/p(r_2 = 3) = 1/p(r_3 = 3) = 1/p(r_4 = 2) = 1/p(r_4 = 2)$: les autres probabilités de réponses étant nulles.

. <u>Réponse selon l'hypothèse antagoniste H-</u>

Sous l'hypothèse H- la réponse dépend de la dimension qui <u>ne</u> détermine <u>pas</u> la correspondance initiale. Cette réponse vérifie, si la relation est déterminée par la forme par exemple :
"la réponse à une boîte de couleur C est l'un des animaux apparus dans les boîtes de couleur C". Nous ajoutons de plus le postulat que la probabilité d'une réponse $rj = i$ à une boîte de couleur C est proportionnelle à la fréquence de l'association de i avec une boîte de couleur C dans la correspondance présentée au sujet à l'item j.
Ceci nous donne pour l'essai <u>spontané</u> le tableau suivant des probabilités de réponse :

---

(1) Nous considérons ce faisant, la substituabilité des animaux sur la partie gauche et sur la partie droite respectivement pour chacune des correspondances à construire. Cette hypothèse doit être considérée comme une première approximation.

(2) ri est la réponse à l'item i.

p ($r_j = i$)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
1	0	1/2	1	1	0
2	0	1/2	0	0	0
3	1	0	0	0	1

. Réponse selon l'hypothèse "mixte" hm

La réponse selon Hm dépend de l'une ou l'autre dimension de la manière suivante :
une réponse $r_j = i$ peut être donnée pour une boîte (f, c) si elle est associée dans la correspondance donnée au sujet à l'item j à une boîte (f, c') ou (f', c) c'est-à-dire soit de forme f, soit de couleur c.

Plus précisément, nous ajoutons le postulat que la probabilité de $r_j = i$ est proportionnelle à la fréquence de l'association de i aux boîtes de forme f ou de couleur c (dans la correspondance donnée). On obtient le tableau suivant des probabilités de réponses (pour l'essai spontané).

p ($r_j = i$)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
1	2/3	1/3	1/2	1/2	0
2	0	1/3	0	1/2	1/2
3	1/3	1/3	1/2	0	1/2

Définition d'un modèle à hypothèses stables

Nous nous limitons pour l'analyse des résultats à l'ensemble de ces 4 hypothèses liées à l'utilisation des dimensions dans la complétion de la correspondance. Nous voulons tester la stabilité de ces hypothèses (à supposer qu'elles soient exclusives de toute autre). Nous voulons tester l'hypothèse selon laquelle un pourcentage α des sujets fait l'hypothèse H+
β " " " " H-
γ " " " " Hm
δ " " " " Ho

de manière stable sur l'ensemble des 5 items ou au moins sur une partie "terminale" d'entre eux : les 2, 3, ou 4 derniers.

Pour cela, nous définissons une "répartition théorique" des réponses ; elle est obtenue par composition des probabilités individuelles de réponses selon chacune des hypothèses avec la distribution des sujets selon les 4 hypothèses : αN, βN, γN, δN.

Nous cherchons ensuite, par comparaison de la répartition "atteindre" obtenue avec la répartition observée, à évaluer α, β, γ, δ si l'identification conduit à une évaluation possible des 2 répartitions.

Cette identification détermine un ensemble d'équations (3 pour chacune dans 5 réponses soit 15 au total), que nous appellerons <u>équations de répartitions</u>.

Nous cherchons donc s'il existe une solution pour cet ensemble d'équations (ou pour un sous-ensemble "terminal" correspondant à l'identification des répartitions des réponses aux 2, 3, 4 derniers items). Plus exactement nous recherchons une solution approchée, c'est-à-dire un ensemble de valeurs α, β, γ, δ tel que la répartition observée et la répartition théorique soient voisines (par exemple pour un écart défini par un X^2). En pratique, pour le nombre de sujets relativement restreint (de 34 à 42) dont nous analysons les réponses, nous utilisons une notion empirique de proximité. Nous sommes conscient que le critère d'acceptation ou de rejet de l'existence d'une solution pour les paramètres α, β, γ et δ est empirique. Nous ne pouvons donc pas effectuer une inférence bien spécifiée sur les hypothèses faites concernant l'existence exclusive et la stabilité des hypothèses H+, H-, Hm et Ho (1).

Boîtes	1	2	3	4	5
Réponses 1	$42\alpha + 28\gamma + 14\delta$	$21\beta + 14\gamma + 14\delta$	$42\beta + 21\gamma + 14\delta$	$42\beta + 21\gamma + 14\delta$	14δ
2	14δ	$21\beta + 14\gamma + 14\delta$	14δ	$42\alpha + 21\gamma + 14\delta$	$42\alpha + 21\gamma + 14\delta$
3	$42\beta + 14\gamma + 14\delta$	$42\alpha + 14\gamma + 14\delta$	$42\alpha + 21\gamma + 14\delta$	14δ	$42\beta + 21\gamma + 14\delta$

(1) De plus, s'ajoutant au problème théorique de la notion d'approximation dans ce type de modèle, le nombre relativement petit de sujets accroît la marge d'incertitude.

EQUATIONS DE REPARTITION POUR FS1

Item 1	$42\alpha + 28\gamma + 14\delta = 24$ $14\delta = 8$ $42\beta + 14\gamma + 14\delta = 10$	$14\delta = 8$ $42\alpha + 28\beta = 16$ $42\beta + 14\gamma = 2$
Item 2	$21\beta + 14\gamma + 14\delta = 11$ $21\beta + 14\gamma + 14\delta = 11$ $42\alpha + 14\gamma + 14\delta = 20$	$21\beta + 14\gamma + 14\delta = 11$ $42\alpha - 21\beta = 9$
Item 3	$42\beta + 21\gamma + 14\delta = 12$ $14\delta = 7$ $42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 23$	$14\delta = 7$ $42\beta + 21\gamma = 5$ $42\alpha - 42\beta = 11$
Item 4	$42\beta + 21\gamma + 14\delta = 9$ $42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 25$ $14\delta = 8$	$14\delta = 8$ $42\beta + 21\gamma = 1$ $42\alpha - 42\beta = 16$
Item 5	$14\delta = 11$ $42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 22$ $42\beta + 21\gamma + 14\delta = 9$	$14\delta = 11$ $42\beta + 21\gamma = 1$ $42\alpha - 42\beta = 10$

Les 12 dernières équations se ramènent à :

$$
\begin{array}{rcccccccc}
7 & \leqslant & 14 & \leqslant & 11 & & & & \\
22 & \leqslant & 42 & + & 21 & + & 14 & \leqslant & 25 \\
 & & 42 & + & 14 & + & 14 & = & 20 \\
 & & 21 & + & 14 & + & 14 & = & 11 \\
9 & \leqslant & 42 & + & 21 & + & 14 & \leqslant & 12
\end{array}
$$

Une "solution approchée" de ce système est :

$\alpha = 0,3$
$\beta = 0$
$\gamma = 0,2$
$\delta = 0,5$

Cette solution prévoit environ 14 réussites complètes et pratiquement aucun pattern 3-1-1-1-3 ou 3-2-1-1-3

EQUATIONS DE REPARTITION POUR CS_1 (1)

Item 1	$34\alpha + 23\gamma + 11\delta = 13$
	$11\delta = 2$
	$34\beta + 11\gamma + 12\delta = 19$
Item 2	$17\beta + 11\gamma + 11\delta = 15$
	$17\beta + 11\gamma + 11\delta = 9$
	$34\alpha + 12\gamma + 12\delta = 10$
Item 3	$34\beta + 17\gamma + 11\delta = 24$
	$11\delta = 4$
	$34\alpha + 17\gamma + 12\delta = 6$
Item 4	$34\beta + 17\gamma + 11\delta = 20$
	$34\alpha + 17\gamma + 11\delta = 9$
	$12\delta = 5$
Item 5	$11\delta = 4$
	$34\alpha + 17\gamma + 11\delta = 10$
	$34\beta + 17\gamma + 12\delta = 20$

Seuls les 3 derniers items donnent un système d'équations pour lequel on peut définir une solution approchée

$\alpha \gtrsim 0,1$

$\beta \doteq 0,35$

$\gamma \doteq 0,2$

$\delta \doteq 0,35$

(1) Le nombre de sujets n'étant pas multiple de 3 (N = 34) l'équirépartition N/3, N/3, N/3 a été remplacée pour simplifier les calculs par la répartition 11, 11, 12.

Seules les deux dernières équations de l'item 2 sont nettement incompatibles avec la solution proposée.

Si nous "retraduisons" les résultats obtenus en fonction du contenu des hypothèses qui se répartissent selon α, β, γ et δ, nous obtenons la répartition suivante des sujets :

Relation forme

Forme déterminant la relation	= 13 sujets environ
Couleur déterminant la relation	= très peu de sujets
Utilisation d'une valeur commune (F ou C indifféremment)	= 8 sujets environ
Pas d'hypothèse de réponse	= 20 sujets environ

Relation couleur

Forme déterminant la relation (incompatible avec les données)	= 12 sujets environ
Couleur déterminant la relation	= environ 3 sujets
Utilisation d'une valeur commune (F ou C indifféremment)	= 7 sujets environ
Pas d'hypothèse	= 12 à 14 sujets.

Sur l'ensemble des deux essais spontanés,

1/ très peu de sujets utilisent la couleur pour déterminer leur réponse (moins de 10 %),

2/ environ 35 % des sujets utilisent la forme pour déterminer leur réponse,

3/ environ 35 % des sujets ne font pas d'hypothèse portant sur la relation entre forme, couleur et réponse,

4/ environ 20 % des sujets utilisent indifféremment forme ou couleur commune pour donner une réponse.

L'existence des équations incompatibles à l'intérieur de chacun des deux essais, ainsi que la répartition différente de l'usage de la forme et de l'absence d'hypothèse dans ces deux essais montre que les résultats précédents sont approximatifs, c'est-à-dire que les hypothèses que nous avons faites au niveau de la construction des équations devraient être affinées pour rendre mieux compte de l'ensemble des résultats.

Cependant les indications obtenues sont compatibles avec l'existence de telles hypothèses pour une très grande partie des sujets

<u>Analyse des patterns de réponses en relation avec les hypothèses H+, H-, Hm</u>

Nous allons maintenant comparer les résultats précédents à ceux fournis par l'étude, sujet par sujet, des réponses globales à chaque essai.

Si nous supposons que les sujets font des hypothèses stables, dans le cas des essais spontanés, nous pouvons relier les hypothyses H+, H-, Hm aux réponses auxquelles ces hypothèses peuvent conduire.

Pour cela, nous allons d'abord définir les patterns compatibles avec ces hypothèses :

compatible avec H+	:	1 3 3 2 2	noté P+
compatible avec H-	:	3 1 1 1 3 3 2 1 1 3	noté P-
compatible avec Hm	:	1 1 1 1 . 3 2 . 2 2 3 3 3 . 3	noté Pm (pour les patterns excluant P+ et P-)

Pour comparer la répartition des sujets selon les hypothèses définies plus haut (au moyen des équations de répartition) et la répartition des patterns de réponses, nous allons préciser la probabilité d'apparition des différents patterns sous chacune des hypothèses :

proba (P + / H+) = 1

proba (P+ / H-) = 0

proba (P+ / Hm) = 1/2 x 1/3 x 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/54 = .02

proba (P+ / Ho) = $(1/3)^5$ négligeable /

proba (P- / H+) = 0

proba (P- / H-) = 1

proba (P- / Hm) = 1/2 x 2/3 x 1/2 x 1/2 x 1/2 = 2/3 x 16 = .04

proba (P- / Ho) = $(1/3)^2$ (2/3) = 8/3 x 81 = 0.3

proba (Pm / Hm) = 1

proba (Pm / Ho) = $(2/3)^4$ - proba (P+/Ho) - proba (P-/Ho) = .19

Nous voyons donc que si les probabilités d'obtenir des patterns compatibles avec les hypothèses H+ et H- sous d'autres hypothèses peuvent être négligées (elles sont toutes inférieures à .05), il n'en est pas de même pour la probabilité d'obtenir un pattern compatible avec Hm sans hypothèse : .20.

Nous ne pouvons donc pas identifier les répartitions des hypothèses et les répartitions des patterns de réponses ; cependant nous pouvons définir à partir des probabilités précédentes, une répartition attendue des sujets selon les patterns définis plus haut à partir de la répartition des sujets selon les différentes hypothèses envisagées.

Nous obtenons les répartitions attendues suivantes (que nous allons comparer avec les répartitions effectives selon les patterns P+ ; P- ; Pm).

Répartitions attendues :

Pour l'essai FS 1 :

patterns "corrects"	P+	: 13 sujets environ
patterns	P-	: 1-2 sujets
patterns "mixtes"	Pm	: 12 sujets environ
résidu		: 16 sujets environ

Pour l'essai CS 1 :

patterns "corrects"	P+	: de 1 à 3 sujets
patterns	P-	: 12 sujets environ
patterns "mixtes"	Pm	: 10 sujets environ
résidu		: de 10 à 11 sujets.

Répartitions effectives

Répartition des patterns P+, P-, Pm et Res. pour FS1

FS_1	CM2	CM1	CE2	CE1	CP	Σ
P+	5	1	2	4	2	14
P-	1	0	0	1	0	2
Pm	0 R	2	2	2	4	10
Rés.	1	4	4	2	5	16

Répartition effective des patterns pour CS1

CS_1	CM2	CM1	CE2	CE1	CP	Σ
P+	2	1	0	0	1	4
P-	3	2	4	1	2	12
Pm	2	3	1	2	1	10
Rés.	0	1	2	3	2	8

La concordance est très grande entre les résultats prévus à partir de la répartition des sujets selon les différentes hypothèses que nous avons définies et les résultats observés sur les patterns de réponses des sujets.

Cette concordance est en faveur de l'hypothèse suivante : les sujets, dans les essais spontanés, ou bien font des hypothèses qui sont définies à partir de l'analyse du matériel selon la forme et la couleur, et qui demeurent stables tout au long de l'épreuve, ou bien - pour une partie importante des sujets - ils répondent "au hasard".

Analyse des réponses pour les essais avec vérification

Nous allons effectuer sur les essais avec vérification les mêmes analyses que pour les essais spontanés, c'est-à-dire :
1/ une analyse des réponses item par item, en comparant les réponses effectives aux répartitions théoriques correspondant aux hypothèses H+, H-, Hm et Ho ;
2/ une analyse des patterns de réponse sujet par sujet.

Nous ne redonnerons pas pour ces analyses de détail des différents calculs effectués pour l'obtention ou la résolution des équations de répartition, ou la détermination des probabilités des patterns de réponse selon les diverses hypothèses considérées.

Comparaison des réponses attendues et effectives à chacun des items

Répartition des réponses pour les essais avec vérification :

FV1 et CV1

FV1

Boîtes	1	2	3	4	5	Σ
Réponses 1	34	2	3	11	4	54
2	1	34	1	29	4	69
3	7	6	38	2	34	87

N = 42

CV1

Boîtes	1	2	3	4	5	Σ
Réponses 1	16	9	6	11	5	47
2	1	19	3	19	2	44
3	17	6	25	4	27	79

<u>Répartition théorique</u> des réponses aux essais après vérification (pour FV1, celle de CV1 s'en déduit par le rapport 34/42 du nombre total de sujets)

Boîtes	1	2	3	4	5
Réponses 1	$42\alpha + 28\gamma + 14\delta$	$42\beta + 28\gamma + 14\delta$	$21\beta + 10\gamma + 14\delta$	$21\beta + 10\gamma + 14\delta$	$21\beta + 10\gamma + 14\delta$
2	14δ	$42\alpha + 14\gamma + 14\delta$	$21\beta + 11\gamma + 14\delta$	$42\alpha + 21\gamma + 14\delta$	$21\beta + 11\gamma + 14\delta$
3	$42\beta + 14\gamma + 14\delta$	14δ	$42\alpha + 21\gamma + 14\delta$	$21\beta + 11\gamma + 14\delta$	$42\alpha + 21\gamma + 14\delta$

Nous allons chercher une solution approchée des équations de répartition définie comme précédemment pour les deux situations FV1 et CV1, pour les 4 items précédés d'une vérification, puisque ce sont les seuls qui diffèrent des essais sans vérification. (Les * signalent les équations incompatibles avec le reste du système).

F

item 2
$$42\alpha + 28\gamma + 14\delta = 2$$
$$42\alpha + 14\gamma + 14\delta = 34$$
$$14\delta = 6^*$$

item 3
$$21\beta + 10\gamma + 14\delta = 3$$
$$21\beta + 11\gamma + 14\delta = 1$$
$$42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 38$$
$$21\beta + 10\gamma + 14\delta = 11^*$$

item 4
$$42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 29^{**}$$
$$21\beta + 11\gamma + 14\delta = 2$$

item 5
$$21\beta + 10\gamma + 14\delta = 4$$
$$21\beta + 11\gamma + 14\delta = 4$$
$$42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 34$$

Nous n'allons pas donner l'extension des équations correspondant à l'essai CV_1. Nous signalerons quelques points importants :

1/ Il n'est pas possible, eu égard à la distribution observée, de supposer des hypothèses stables (en dehors de l'hypothèse correcte de dépendance de la couleur) ; en particulier, on observe une évolution de l'item 1 à l'item 3 de la répartition des réponses compatibles avec H+ et H- ; les réponses correctes croissant, les réponses selon la forme décroissant.

2/ L'item 4 de CV1 présente le même caractère "anormal" que l'item 4 de l'essai FV_1, par rapport aux items 3 et 5).

3/ Comme pour les essais spontanés, on observe une différence entre les essais "forme" et "couleur" avec vérification : moins grand nombre d'hypothèses correctes dans l'essai "C" - et cela dans chacun des items.

Les relations entre l'utilisation d'un des 2 critères forme ou couleur sont respectivement :

- pour la relation "F" : $\alpha - \beta = 0.7$ $\beta < 0,15$ $\delta < 0,25$
- pour la relation "C" : $\alpha - \beta = 0,5$ $\beta < 0,25$

Il y a une différence très importante en faveur de l'hypothèse correcte dans chacun des 2 essais (bien qu'elle soit moins marquée pour l'essai CV_1 que pour l'essai FV_1).

Pour l'ensemble des items

$\alpha > 0,4 + \delta m/3$ pour "F" (δm = pourcentage des sujets qui, constamment ne font pas d'hypothèse)
$\alpha > 0,12 + \delta m/3$ pour "C"

Nous observons donc sur les réponses item par item une différence très importante entre les essais spontanés et les essais avec vérification : lorsqu'une vérification n'est effectuée par le sujet, la constitution d'hypothèses stables est compatible avec les résultats observés ; il n'en est plus de même lors des essais avec vérification.

Dans le premier cas, on peut répartir les sujets en 4 classes (trois classes correspondant aux hypothèses H+, H-, Hm et une classe résiduelle correspondant à l'hypothèse vide Ho) ; il est impossible de faire une opération analogue de classification des sujets dans le cas des essais avec vérification, quel que soit le type de relation à déterminer (forme ou couleur).

Cependant, les équations de répartition obtenues pour les essais avec vérification fournissent une borne inférieure du pourcentage des sujets faisant une hypothèse correcte ; cette borne est toujours supérieure à l'estimation du pourcentage des hypothèses correctes pour les essais sans vérification : ainsi pour la relation "forme" cette borne est 0,40 + dm/3, et le pourcentage pour les essais sans vérification est 0,30 (pour la relation "couleur" la différence est plus faible).

D'autre part, les hypothèses H- ne sont jamais maintenues de manière stable dans les essais avec vérification, alors qu'elles sont nombreuses dans l'essai spontané, pour la relation "couleur".

<u>Analyse des patterns de réponse, en fonction des hypothèses</u>

Si nous voulons comparer les résultats de groupe item par item avec les réponses à l'ensemble de chaque essai (moins le premier item), sujet par sujet, nous devons calculer, comme pour les essais spontanés, les probabilités des patterns P+, P-, et Pm compatibles respectivement avec les hypothèses H+, H- et Hm (1) sous chacune des hypothèses, pour les <u>4 derniers items</u>, en supposant les hypothèses <u>stables</u>.

1/ Pr (P+ / H+) = 1
Pr (P+ / H-) = 0
Pr (P+ / Hm) = 1/3 x 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/24 ≃ 04
Pr (P+ / Ho) = $(1/3)^4$ = négligeable.

2/ Pr (P- / H+) = 0
Pr (P- / H-) = 1
Pr (P- / Hm) = 1 x 1/2 x 1/2 x 1/2 x 1/2 = 1/16 ≃ .06
Pr (P- / Ho) = 1 x 1/3 x 2/3 x 2/3 x 2/3 = 8/21 ≃ .10

Pr (Pm / H+) = 0
Pr (Pm / H-) = 0
Pr (Pm / Hm) = 1
Pr (Pm / Ho) = 2/3 x 1 x 1 x 1 - Pr (P+/Ho) - Pr (P-/Ho) ≃ 0.55

---

(1) Patterns <u>compatibles</u> avec

		Notés
l'hypothèse H+	$\in \{ \; / \; 1 \; / \; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3} \; / \; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3} \; / \; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2}$	P+
" H-		P-
" Hm	$\in \left\{ \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3} \; / \; \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2} \; / \; \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \; / \; \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \; / \; \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} \right.$	Pm*

* Hm à l'exclusion de H+ et H-

Nous voyons que la probabilité de réponse correcte aux 4 derniers items avec une hypothèse stable autre que l'hypothèse correcte est négligeable.

Il n'en est pas de même pour les patterns P- : des hypothèses stables "mixtes" ou "vide" peuvent donner des patterns P-. Quant aux patterns Pm, leur probabilité d'apparition lorsque le sujet répond "au hasard" est très importante : .55

Si nous effectuons l'analyse des réponses effectives, pour chaque âge, nous obtenons les répartitions suivantes FV_1 et CV_1 des patterns P+, P-, Pm (à l'exclusion des patterns P+ et P-).

Essai FV_1

	CM_2	CM_1	CE_2	CE_1	CP	
P+	7	4	6	4	6	27
P-	0	0	0	0	0	0
Pm	0	1	2	4	2	9
Résidu	0	2	0	1	3	6

Essai FV_1

	CM_2	CM_1	CE_2	CE_1	CP	Σ
P+	4	3	3	1	2	13
P-	0	0	0	0	0	0
Pm	3	3	3	4	3	16
Résidu	1	1	1	1	1	5

Nous remarquons que :

1/ Il n'y a, sur les quatre derniers items, aucune réponse compatible avec une hypothèse "H-", c'est-à-dire de réponse selon le critère non pertinent.

2/ La proportion des réponses compatibles avec l'hypothèse correcte est respectivement :
27/42 = 0,67 pour l'essai FV1
13/34 = 0,38

Ces proportions sont compatibles avec les résultats globaux de répartition des hypothèses H+.

3/ Le grand nombre de réponses compatibles avec Hm dans l'essai CV1 (16/34) est compatible soit avec le changement du critère utilisé au cours de l'essai soit simplement avec l'absence d'hypothèse tout au long de l'épreuve, l'hypothèse H- ayant été infirmée dès la première vérification.

Il n'est pas possible d'aller plus loin dans nos interprétations sans faire d'hypothèses supplémentaires, par exemple sur les modalités (probabilité d'apparition) de changement d'hypothèse d'un item à l'autre.

Le seul point qui ressort clairement de nos résultats est qu'aucun sujet ne persévère dans une hypothèse "antagoniste" où la relation serait déterminée par le critère "non pertinent".

Comparaison des réponses des sujets selon les essais

Nous allons redonner dans un tableau récapitulatif les répartitions des patterns de réponse des sujets selon P+, P-, Pm et Rés. pour chacun des essais (avec ou sans vérification) et selon le type de relation à déterminer ("forme" ou "couleur") c'est-à-dire selon la dimension déterminant la correspondance.

Tableau récapitulatif sur l'ensemble des essais

	FS_1	FV_1	CS_1	CV_1
P+	14/42	27/42	4/34	13/34
P-	2/42	0	12/34	0
Pm	10/42	9/42	10/34	16/34
Résidu	16/42	6/42	8/34	6/34

Comparaison des répartitions des patterns (P+, P-, Pm et Résidu) sur l'ensemble des résultats.

1. Essais spontanés / Essais après vérification

Pour la forme les deux répartitions diffèrent significativement ($X^2 = 10,6$; dl = 3, $p \approx .01$).
En particulier cette différence porte sur :

a) l'accroissement massif du nombre de patterns corrects : de 14/42 à 27/42.

b) une décroissance nette des réponses "résiduelles" correspondant à une absence d'hypothèse et/ou à des hypothèses qui ne sont pas reliées à la structure du matériel.

Pour la couleur la différence entre les deux répartitions est encore plus significative ($X^2 = 19$; dl = 3 ; $p \approx .005$).

Cette différence porte principalement sur :

a) la disparition complète des patterns P- correspondant à des hypothèses de dépendance de la forme (12/34 à 0/34).

b) l'accroissement du nombre des patterns corrects de 4/34 à 13/34.
L'analyse de cette différence des répartitions pour la "relation-forme" et la "relation-couleur" montre un effet différencié de l'utilisation de la vérification selon la dimension qui détermine la correspondance à compléter.

2. Différence selon les dimensions déterminant la correspondance

Pour l'essai spontané la répartition des patterns diffère significativement selon que la correspondance dépend de la forme F ou de la couleur C.
(X^2 = 16,8 dl = 3 P ≃ 005)

La différence porte

a) partiellement sur le nombre de patterns corrects (14/42 pour F contre 4/34 pour C)

b) principalement sur le nombre de patterns "antagonistes" c'est-à-dire déterminé par exemple par l'utilisation de la couleur pour répondre à la correspondance définie par la forme : très peu de tels patterns pour F : 2/42
beaucoup de tels patterns pour C : 12/34.

Pour l'essai avec vérification

La comparaison effectuée exclut les réponses selon un pattern "antagoniste" qui ne se manifestent dans aucune relation. Les répartitions des autres patterns diffèrent significativement pour F et C (moins cependant que toutes les répartitions précédentes : X^2 = 6,2 ; dl = 2 ; p $\leq$ .05).

Cette différence ne touche pratiquement pas les réponses résiduelles, mais correspond à un nombre beaucoup plus grand de réponses correctes pour la relation forme (27/42) que pour la relation couleur (13/34) avec la différence corrélative (1) du nombre des patterns "mixtes" Pm).

---

(1) Nous considérons la différence sur les réponses correctes car ce sont seulement ces réponses pour lesquelles il y a très peu de "biais" entre la proportion des hypothèses correctes et celle des réponses correctes, alors que pour les patterns "mixtes" ce biais est très important.

3. Conclusion sur les différences sur l'ensemble des sujets

L'analyse des réponses a été faite pour étudier les hypothèses des sujets portant sur la dépendance par rapport à l'une ou l'autr des dimensions forme et couleur du matériel expérimental.

L'analyse item par item sur l'ensemble des sujets et l'analyse sujet par sujet pour chaque essai sont convergentes. Ces analyses montrent la compatibilité des résultats avec l'existence et la stabilité des hypothèses (de réponses) liées aux dimensions F et C qui décrivent le matériel, lorsque les réponses ne sont pas soumises à une vérification.

Il n'en est pas de même dans les essais après vérification où une partie au moins des sujets changent d'hypothèses selon les items en fonction des vérifications effectuées à chaque item et où aucun sujet ne persévère tout au long de ses réponses dans l'utilisation de la dimension non pertinente.

D'autre part, les vérifications possibles augmentent notablement les réponses correctes (aux 4 derniers items). L'ensemble de ces résultats montre que la donnée d'une correspondance partielle, permettant de tester les hypothèses sur les propriétés de la correspondance complète (liées à la structure du matériel comme produit de 2 dimensions) ne suffit pas à déterminer des hypothèses correctes alors que la vérification "pas à pas" des réponses dernières (qui logiquement n'apporte pas d'information supplémentaire assure un accroissement notable des réponses correctes (1).

Le statut des dimensions : "forme" et "couleur" est extrêmement différent (pour les 2 types d'essais) : les hypothèses spontanées d'une dimension pertinente portent majoritairement sur la forme quelle que soit la correspondance partielle proposée :

13 "F" contre 2 "C" pour 42 sujets qui ont à trouver une relation "forme".
12 "F" contre 4 "C" pour 34 sujets dans le cas de la relation couleur et cela dans tous les groupes d'âge. Lorsqu'il y a une vérification après chaque item les hypothèses "incompatibles" ne reste pas stables mais la différence d'utilisation des 2 dimensions de retrouve dans la différence du nombre des patterns corrects selon

---

(1) Le rang des items par rapport à l'ensemble de l'épreuve n'est pas le point important dans ce changement : le 1er item de l'essai "avec vérification est répondu comme les essais précédents, étant lui-même sans vérification préalable ; le nombre des réponses correctes n'est pas une fonction croissante du rang des items considérés.

la relation, toujours en faveur de la forme : (27/42 contre 13/34).

Ces résultats valables pour tous les groupes d'âge recoupent les résultats déjà obtenus avec d'autres matériels décrits comme "forme x couleur", sur le privilège d'une des dimensions pour une épreuve de ce type où une correspondance doit être construite entre F x C et un autre ensemble ; privilège dépendant à la fois du statut réciproque des dimensions dans le matériel et de l'âge des sujets (cf. infra).

Etude des secondes épreuves

Nous effectuons comme pour les premiers essais la même analyse soit item par item, soit sujet par sujet.

Nous notons FS_2 l'essai spontané de la relation forme présentée en 2ème épreuve, FV_2 l'essai avec vérification, CS_2 et CV_2 les essais analogues pour la relation couleur.

Répartition des réponses pour FS_2 (34 Ss)

items / réponses	1	2	3	4	5
1	9	11	21	19	4
2	3	16	4	12	8
3	22	7	9	3	22

Equations de répartition pour FS_2

$$
\begin{aligned}
34\alpha + 24\gamma + 12\delta &= 9\\
12\delta &= 3\\
34\beta + 11\gamma + 11\delta &= 22
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
17\beta + 11\gamma + 11\delta &= 11\\
17\beta + 11\gamma + 12\delta &= 16\\
34\alpha + 12\gamma + 12\delta &= 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
34\beta + 17\gamma + 12\delta &= 21\\
12\delta &= 4\\
34\alpha + 17\gamma + 11\delta &= 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
34\beta + 17\gamma + 11\delta &= 19\\
34\alpha + 17\gamma + 12\delta &= 12\\
12\delta &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12\delta &= 4\\
34\alpha + 17\gamma + 12\delta &= 8\\
34\beta + 17\gamma + 11\delta &= 22
\end{aligned}
$$

Ces équations se ramènent à :

$$3 \leqslant 12\delta \leqslant 4$$
$$8 \leqslant 34\alpha + 17\beta + 11\delta \leqslant 12$$
$$34\alpha + 12\gamma + 12\delta = 7$$
$$34\alpha + 23\gamma + 12\delta = 9$$

$$19 \leqslant 34\beta + 17\gamma + 11\delta \leqslant 22$$
$$34\beta + 11\gamma + 11\delta = 22$$
$$11 \leqslant 17\beta + 11\gamma + 11\delta \leqslant 16$$

Une solution approchée de l'ensemble de ce système existe, donnant comme répartition des hypothèses :

H+ ≃ 0,1
H- ≃ 0,5
Hm ≃ 0,1
Ho ≃ 0,3

(hypothèse "couleur" conservée)

Remarquons que cette solution approchée est plus semblable à celle obtenue pour CS_1 qu'à celle de CF_1 (1)

CS_1	FS_1
H+ ≃ 0,1	H+ ≃ 0,3
H- ≃ 0,35	H- ≃ 0
Hm ≃ 0,2	Hm ≃ 0,2
Ho ≃ 0,35	Ho ≃ 0,5

La répartition prévue des patterns correspondant à ces hypothèses pour FS_2 est la suivante :

P+ ≃ 4 sujets
P- ≃ 17 "
Pm ≃ 3 "
Po ≃ 10 "

La répartition effectuée des sujets selon les patterns est :

---

(1) En particulier en ce qui concerne les réponses selon une hypothèse correcte ou au contraire antagoniste.

FS_2	CM_2	CM_1	CE_2	CE_1	CP	Σ
P+	3	1	0	0	1	5
P-	2	5	3	1	3	14
Pm	1	1	0	2	1	5
Rési.	2	0	4	3	1	10
N	8	6	7	6	6	34

P- a été légèrement surestimé dans notre approximation aux dépens de P+ et Pm, mais les répartitions attendues et effectuées sont très voisines.

Nous retrouvons un résultat analogue à celui observé pour la première épreuve : la convergence des analyses item par item et sujet par sujet, sous l'hypothèse de stabilité du système des réponses, selon H+, H-, Hm ou Ho.

Répartition des réponses pour CS_2 (42 Ss)

réponses \ items	1	2	3	4	5
1	7	22	33	27	3
2	3	13	2	9	7
3	32	7	7	6	32

Les équations de répartition pour CS_2 nous conduisent à la solution approchée (compatible avec le système d'équations excluant les 2 premières équations de l'item 2 qui sont incompatibles mutuellement)

$\alpha < 0,1$
$\beta \simeq 0,35$
$\gamma \simeq 0,05$
$\delta \geq 0,5$

Cette solution correspond à la répartition de patterns suivante :

P+ = 4 sujets
P- = 27 "
Pm = 4 "
Po = 7 "

Nous remarquons la très forte similitude (en ce qui concerne en particulier les hypothèses H+ et H-) avec l'essai spontané CS_1, avec un abaissement du nombre d'hypothèses correctes et du nombre d'hypothèses mixtes (comme pour le cas précédent FS_2).

La répartition effective des sujets selon les patterns correspondant aux différentes hypothèses est la suivante :

CS_2	CM_2	CM_1	CE_2	CE_1	CP	Σ
P+	3	0	0	0	0	3
P-	2	5	6	4	7	24
Pm	0	1	2	1	2	6
Résidu	2	1	0	4	2	9
	7	7	8	9	11	42

Nous trouvons un nombre de patterns P- inférieur au nombre calculé, ce qui est normal puisque la solution approchée n'est pas valable pour l'ensemble du 2ème item.

Cependant, la répartition attendue et la répartition effective sont très proches (X^2 1 dl : 3 = .80).

La convergence de résultats entre analyse item par item et analyse sujet par sujet constatée sur les épreuves passées en premier se retrouve pour les épreuves passées en second lieu

<u>Essais avec vérification</u>

Répartition des réponses item par item pour FV_2 (34 Ss)

Item / Réponse	1	2	3	4	5
1	8	6	6	7	7
2	5	25	1	26	1
3	21	3	27	1	26

Comme pour tous les essais "avec vérification" nous étudions le système d'équation de répartition pour les 4 derniers items (le 1er n'étant pas précédé d'une vérification et étant d'ailleurs compatible avec les 5 items FS_2).
Les équations de répartition ne sont pas compatibles. Elles sont équivalentes au système :

$$\begin{array}{l} 34\alpha + 17\gamma + 11\delta = 26 \\ 17\beta + 9\gamma + 11\delta = 7 \\ 17\beta + 8\gamma + 12\delta = 1 \\ 34\beta + 23\gamma + 11\delta = 6 \\ 12\delta \leqslant 3 \end{array}$$

équations mutuellement incompatibles

Les équations incompatibles se retrouvent (ont le même statut) dans chacun des items : il nous paraît qu'une des hypothèses d'équiprobabilité dans la réponse est en défaut dans les 3 derniers items où nous trouvons un nombre élevé de réponses "1".

L'ensemble des équations est compatible avec :

$\alpha \simeq 0,66$
β négligeable $\simeq 0$

$\left.\begin{array}{l}\gamma \simeq 0,15 \\ \delta \simeq 0,2\end{array}\right\}$ si nous modifions l'hypothèse de réponse pour Hm

Nous observons une régularité dans le système d'équations de répartition, pour FV_2 que nous n'avons pas observée pour la première épreuve. En particulier, il est possible de faire l'hypothèse de la stabilité des réponses correctes et de l'absence des hypothèses "antagonistes".

La proportion des hypothèses correctes conduit à une situation de 22 patterns P+ environ (sur 34 sujets).

La répartition attendue est la suivante :

P+ $\simeq$ 22 sujets
P- $\simeq$ 1 "
Pm $\simeq$ 8 "
Po $\simeq$ 3 "

La répartition effective des sujets pour les patterns correspondant aux différentes hypothèses est la suivante :

FV_2	CM2	CM1	CE2	CE1	CP	Σ
P+	7	5	3	2	4	21
P-	0	0	1	0	1	2
Pm	1	1	2	3	1	8
Résidu	0	1	1	1	0	3
N	8	7	7	6	6	34

La convergence extrêmement forte entre l'estimation de répartition obtenue à partir des équations de répartition et la répartition effective est compatible avec la <u>stabilité</u> des hypothèses, contrairement à ce qu'on observait pour la première épreuve dans l'essai avec vérification.

Répartition des réponses item par item pour CV_2 (42 sujets)

Réponse \ Item	1	2	3	4	5
1	10	7	8	7	10
2	2	23	2	32	2
3	30	11	32	3	30

Comme précédemment, les équations de répartition ne donnent pas un système d'équation compatibles. De plus, l'item 2 ne donne pas des équations analogues aux équations des items 3, 4 et 5 :

item 2
$$42\beta + 28\gamma + 14\delta = 7$$
$$42\alpha + 14\gamma + 14\delta = 23$$
$$14\delta = 11$$

Item 3,4,5
$$21\beta + 11\gamma + 14\delta = 10 \text{ à } 7$$
$$21\beta + 10\gamma + 14\delta = 2 \text{ à } 3$$
$$42\alpha + 21\gamma + 14\delta = 30 \text{ à } 32$$

Les items 3, 4, 5 fournissent les mêmes équations mutuellement incompatibles que celles observées pour FV_2 à savoir les 2 équations :

$$21\beta + 11\gamma + 14\delta = 10 \text{ à } 7$$
$$21\beta + 10\gamma + 14\delta = 2 \text{ à } 3$$

L'ensemble des équations des items 3, 4, 5 est compatible avec
β négligeable = 0
$\alpha \simeq 0,66$ $(42\alpha = 28)$

d'où dans la répartition théorique : $P- \simeq 0$
$P+ \simeq 28$

La répartition effective des sujets pour les patterns correspondant aux hypothèses H+, H- et Hm est la suivante :

CV_2	CM2	CM1	CE2	CE1	CP	Σ
P+	6	3	1	5	4	19
P-	0	0	0	0	0	0
Pm	0	4	4	1	4	13
Résidu	1	0	3	3	3	10
N	7	7	8	9	11	42

Nous ne trouvons aucun pattern P- ce qui est en accord avec la solution approchée = 0.

La répartition concernant les patterns des 4 derniers items diverge de la répartition compatible avec la solution approchée pour les seuls 3 derniers items (19 P+ contre 28 H+).

Ce résultat est compatible avec l'accroissement des hypothèses correctes non seulement entre le premier et le 2ème item (correspondant à la première vérification) mais aussi entre le 2ème et le 3ème item.

11. Mise en relations de boîtes (C1 x C2) et de dominos (Ag x Ad)

Les résultats de la troisième expérience de correspondance produit apportent des éléments de réponse sur l'effet de la plus ou moins grande indétermination (ouverture) de la situation-problème proposée au sujet.

D'une part, la validation des réponses fournie à chaque item lors des essais avec vérification permet effectivement à l'enfant d'éliminer les hypothèses correspondant à la dimension non pertinente, alors que la contradiction de cette hypothèse avec les données initiales fournies (par les couples mis en correspondance par l'expérimentateur) ne suffisait pas à l'élimination de ces hypothèses.

D'autre part, les hypothèses confirmées sont conservées alors qu'un changement de dimension devrait avoir lieu : très peu d'enfants - et essentiellement au CM2 - modifient spontanément leur hypothèse à l'analyse des nouvelles données. En revanche, la validation après changement de dimension pertinente leur permet le changement d'hypothèse ; ceci concerne cependant seulement une partie de ceux des enfants qui faisaient spontanément des hypothèses fausses mais stables. Ce n'est donc pas le caractère déterminé de la "règle du jeu" qui apparaît comme décisif dans la constitution des hypothèses : il y a des obstacles spécifiques pour constituer des hypothèses stables, et des obstacles encore plus importants au changement de dimension comme déterminant une correspondance.

La possibilité de valider chacune des réponses apparaît bien comme productive : la contradiction entre la réponse proposée par l'enfant et celle qu'il "lit" lors de la validation apparaît comme opératoire, alors qu'il n'en est pas de même des données initiales de la correspondance.

Enfin, la détermination séparée des deux correspondances unidimensionnelles n'assure pas la possibilité de donner même avec vérification une réponse correcte pour la correspondance bidimensionnelle : il apparaît donc bien une difficulté spécifique à "multiplier" les relations unidimensionnelles.

La question est néanmoins ouverte de savoir s'il s'agit d'une "charge en mémoire" due à la nécessité de traiter deux informations complexes, ou si le caractère bidimensionnel d'un matériel F x C qu'il faut analyser présente une difficulté propre. La dernière expérience présentée dans ce travail aborde ce problème : elle reprend le même paradigme que la précédente mais F x C est remplacé par un produit C_1 x C_2 produit homogène avec la dimension "couleur", avec des valeurs différentes pour C_1 et C_2, ce produit étant réalisé sous la forme d'un couple de deux pastilles de couleur. La décomposition de C_1 x C_2 est donc réalisée dans une disposition spatiale analogue à celle employée dans les deux expériences pour la réalisation de l'ensemble A_1 x A_2 = ceci doit produire une facilitation pour combiner des relations simples précédemment établies (si l'hypothèse de difficulté propre d'analyse bidimensionnelle est vérifiée).

°

° °

DOMINOS ET BOITES "COULEURS"

11.1. MATERIEL EXPERIMENTAL ET EXPERIENCE

A) Le matériel expérimental est le suivant :

a) Un ensemble de 9 boîtes ; chaque boîte porte deux pastilles de couleur ; la couleur de gauche est vert (V), bleu (B) ou jaune (J) ; celle de droite : noir (N), violet (Vi) ou marron (M). L'ensemble des boîtes peut être identifié au produit cartésien (V, B, J) x (N, Vi, M) ≡ Cg x Cd de l'ensemble Cg des trois couleurs de gauche par Cd, ensemble des 3 couleurs de droite.

b) Un ensemble de 9 dominos ; chaque domino porte deux animaux :
à gauche : rat, renard, ou castor
à droite : mouton, chèvre ou cochon.

L'ensemble des dominos peut être identifié au produit Ag x Ad (des trois animaux de gauche par ceux de droite).

On cherche à faire trouver aux sujets une correspondance entre boîtes et dominos ("deviner le domino caché dans chaque boîte") qui est déterminé par :

- une relation rg entre les couleurs Cg et les animaux Ag (à gauche sur les dominos et les cartes),

- une relation rd entre les couleurs Cd et les animaux Ad (à droite sur les dominos et les cartes).

Remarque : la décomposition de l'ensemble B est facilitée par l'indexation spatiale qui attribue les éléments de Cg à gauche de la boîte, et ceux de Cd à la partie droite. Il en est de même pour les dominos.

B) Déroulement de l'expérience

Une partie préliminaire permet de s'assurer que les sujets peuvent identifier correctement les boîtes et les dominos : on demande au sujet un rangement des boîtes sur un tableau comportant les mêmes couples de couleurs et les dominos sur un tableau comportant les mêmes couples d'animaux. (Cf. feuille d'expérimentation jointe en annexe).

L'expérience proprement dite comporte trois parties :

1) Détermination par le sujet de rg
2) Détermination par le sujet de rd
3) Détermination par le sujet de rg x rd.

1) Deviner l'animal de gauche caché dans chaque boîte : le sujet voit 4 boîtes ouvertes à gauche et doit deviner les 5 animaux des 5 autres boîtes.

2) Même chose pour la droite : les mêmes boîtes sont ouvertes à droite.

3) Les 4 mêmes boîtes sont entièrement ouvertes, le sujet doit deviner les deux animaux des dominos cachés dans les 5 autres boîtes.

Dans chaque partie il y a 2 phases (au moins)

Phase 1 - le sujet donne sa réponse pour 5 boîtes présentées dans l'ordre donné sur les protocoles, et il ne vérifie pas : situation en "spontané".

Phase 2 - le sujet donne à nouveau sa réponse (avec un ordre différent de boîtes) et après chaque réponse vérifie (il ouvre la boîte à gauche, et la laisse ouverte) : réponse "avec vérification".

L'ordre de donnée des 5 autres boîtes est fixé pour l'essai "spontané" et pour l'essai "avec vérification". Il est donné en annexe pour chacune des trois épreuves.

Pour chacune des épreuves on montre au sujet le contenu (à droite, à gauche ou complet) des boîtes portant les couples de couleur suivants :

(V, N), (V, Vi), (B, Vi) et (J, M),

placés de façon contiguë dans cet ordre.

Dans l'épreuve 1, lorsque le sujet doit découvrir l'animal de gauche il a donc devant lui :

(V, N) et (V, Vi) qui ont même couleur de gauche, contiennent le même animal à gauche (Ra).

(V, Vi) et (B, Vi) qui ont même couleur à droite mais deux couleurs différentes à gauche, contiennent des animaux de gauche différents (Ra et Re).

Cette double condition est nécessaire pour que seul un des descripteurs couleurs (celui de gauche) détermine une solution compatible avec les données.

Il en est de même pour l'épreuve B, où seul le descripteur couleur de droite, permet de déterminer une solution compatible avec les données.

Dans la dernière épreuve la donnée d'une "redondance" apparente assure l'unicité de la relation produit des 2 précédentes comme solution compatible avec les données.

Les remarques précédentes n'ont bien entendu de sens que dans la recherche d'une relation définie à partir de la description en couples de couleurs. Si la relation cherchée n'est pas de ce type, la question de l'unicité et de la compatibilité n'a plus de sens. Nous voulons donc que <u>lorsqu'un sujet fait l'hypothèse</u> (1) d'une relation définie à partir de la structure de produit de deux descripteurs (attributs), un seul choix possible soit <u>compatible</u> avec la partie de la relation qui lui est donnée.

(1) Que cette hypothèse soit réalisée ou non. Nous verrons plus loin les problèmes posés sur ce point.

11.2. SUJETS

65 sujets de 6 à 10 ans ont passé l'ensemble des épreuves. Ils se répartissent en :

18 sujets de 6 à 7 ans dont 18 à l'âge normal de leur classe CP.

18 sujets de 6 à 8 ans dont 14 à l'âge normal de leur classe CE1.

21 sujets de 8 à 9 ans dont 15 à l'âge normal de leur classe CE2.

8 sujets de 9 à 10 ans ayant 1 an de retard scolaire.

Pour étudier un éventuel effet du facteur gauche/droite dans la présentation du premier item (déterminer une relation portant sur les animaux de gauche ou sur ceux de droite) nous avons réparti le premier groupe de sujets (6-7 ans) en 2 sous-groupes : G1 est le groupe des sujets qui doivent déterminer en premier la relation "gauche". G2 est celui des sujets qui doivent déterminer en premier la relation "droite".

L'étude des résultats sur ce groupe a montré (voir ci-dessous) qu'il n'y avait pas d'influence du facteur gauche/droite sur les réussites à cet item (ni sur le reste des épreuves) ; nous avons donc fait passer les autres sujets dans un ordre identique : relation gauche en première épreuve, avec hypothèse que l'effet gauche/droite ne décroissait pas avec l'âge.

11. 3. ANALYSE DES RESULTATS

A - Epreuve préliminaire

Nous notons les réussites ou échecs (en indiquant le nombre d'erreurs) à la mise en correspondance.

a) des boîtes avec le tableau des mêmes boîtes bicolores,

b) des dominos avec le tableau des mêmes dominos.

B - Relations

Les analyses correspondent au découpage suivant de l'expérience :

- nous appellerons item la donnée d'une boîte bicolore à laquelle il faut associer un animal ou un couple d'animaux ;

- nous appellerons réponse élémentaire la réponse d'un animal ou d'un couple d'animaux correspondant à une boîte ;

- nous appellerons essai l'ensemble des 5 items correspondant aux boîtes de C x C' pour lesquelles le sujet doit fournir une réponse.

Les essais sont de deux types :

- essai "spontané", "S" : le sujet répond à chacune des cinq boîtes données dans l'ordre cité plus haut. Chaque item comporte la donnée d'une boîte - d'une réponse élémentaire - pas d'issue ;

- essai "avec vérification", "V" : après chacune de ses réponses le sujet voit l'animal correspondant à la bonne réponse ; chaque item comporte donc : la donnée d'une boîte - une réponse élémentaire - une issue.

Pour chaque essai, nous appellerons réponse globale, l'ensemble des 5 réponses élémentaires.

Nous appellerons épreuve l'ensemble des deux essais "spontanés" et "avec vérification" correspondant à une même relation à trouver.

Nous appellerons résultat de l'épreuve une classification des sujets en fonction de leur réponse globale au dernier essai d'une épreuve. Pour chacune des relations (simples et double) nous étudions :

- les résultats de chaque épreuve,

- les réponses globales de chaque essai, pour analyser l'effet des vérifications,

- la succession des réponses élémentaires, en fonction d'un modèle mathématique sur les types d'hypothèses et de réponses des sujets.

Les deux premières analyses sont effectuées sujet par sujet, la dernière item par item sur un ensemble de sujets. Le lien entre ces analyses non indépendantes (mais qui apportent des informations non équivalentes) est obtenu en définissant plusieurs patterns de réponses (à chaque essai) correspondant à la succession des réponses élémentaires pour diverses hypothèses.

C'est à partir de ces patterns que nous classifions les réponses des sujets.

Nous allons préciser ces patterns après avoir effectué un codage sur les ensembles Ad et Ag pour mettre en évidence les isomorphismes entre essais "gauche" et essais "droite".

Les relations simples sont définies par la donnée de correspondances initiales partielles qui sont isomorphes, avec un ordre de succession qui corresponde aussi à cet isomorphisme.

Nous avons choisi une numérotation des animaux de Ad et Ag qui mette en évidence cet isomorphisme ; c'est ce codage qui sera utilisé pour toutes nos analyses.

Codage de Ag : rat = 1
renard = 2
castor = 3

Codage de Ad : chèvre = 1
mouton = 2
cochon = 3

La bijection suivante entre les couleurs de Cg et Cd et les animaux de Ag et Ad respectivement, permet de compléter l'isomorphisme :

V et Vi sont en correspondance avec 1
N et B " " " " 2
J et M " " " " 3

Les correspondances partielles initiales sont isomorphes et le codage des boîtes restantes, avec la succession pour l'essai spontané, donne (pour rg) :
(1,3) - (3,1) - (3,2) - (2,2) - (2,3)

Le codage analogue pour rd est obtenu en permutant droite et gauche dans chacune des parenthèses.

Les classes de réponses obtenues après ces codages sont les suivantes :

Relations simples : (réponses valables aussi bien pour rg et pour rd).

R : - réponse selon le pattern correct, c'est-à-dire :
r1 = 1
r2 = 3
r3 = 3
r4 = 2
r5 = 2
C : - réponse selon un pattern (non correct) du type suivant :
r1 = 1 ou 3
r2 = 1, 2 ou 3
r3 = 1 ou 3
r4 = 1 ou 2
r5 = 2 ou 3

Ces réponses ont la propriété suivante : une réponse à l'item n est possible si la boîte présentée à l'item n a une couleur commune avec une boîte présentée contenant l'animal i.

E : - réponses "résiduelles" c'est-à-dire où
(r1 = 2) et/ou (r3 = 2) et/ou (r4 = 3) et/ou (r5 = 1)

Pour l'essai avec vérification :

R : - réponse selon le pattern correct :
r1 = 1
r2 = 2
r3 = 3
r4 = 2
r5 = 3
C : - réponse selon le pattern de type suivant :
r1 = 1 ou 3
r2 = 1 ou 2
r3 = 1, 2 ou 3
r4 = 1, 2 ou 3
r5 = 1, 2 ou 3
E : - réponses "résiduelles" c'est-à-dire où
(r1 = 2) et/ou (r2 = 3).

La modification pour les patterns "C" et "E" provient du fait suivant : à l'item n, le sujet répond selon ses hypothèses en fonction de l'information apportée par les boîtes ouvertes : dans l'essai sans vérification les boîtes ouvertes sont les 4 boîtes qui définissent la correspondance partielle donnée au départ.

Dans l'essai avec vérification les boîtes ouvertes sont celles de la correspondance partielle donnée, plus celle des items précédant l'item n.

L'analyse des réponses pour la relation rd est analogue.

Relation produit :

Les classes de réponses à l'essai sans vérification sont les suivantes :

R - réponses selon le patterncorrect :

r1 = (1,1)

r2 = (2,2)

r3 = (2,3)

r4 = (3,3)

r5 = (3,1)

G - réponse selon un pattern non correct du type suivant (.= réponse quelconque)

r1 = (1,.)

r2 = (2,.)

r3 = (2,.)

r4 = (3,.)

r5 = (3,.)

Ces patterns correspondent à une réponse où la relation rg seule est utilisée.

D - de façon analogue on définit le type de pattern (non correct) compatible avec la relation rd.

r1 = (.,1)

r2 = (.,2)

r3 = (.,3)

r4 = (.,3)

r5 = (.,1)

E - réponses "résiduelles" correspondant aux autres patterns possibles qui diffèrent des précédents.

Remarques

1/ Dans les relations simples nous n'avons pas distingué dans C les réponses suivant la relation avec la couleur de droite - cas particulier de réponse suivant une couleur commune - qui sont incompatibles avec la correspondance partielle donnée.

2/ Dans la relation produit nous n'avons pas distingué dans E, les patterns qui correspondraient à des réponses suivant une couleur commune, par exemple

la réponse à (J,N) pourrait être : soit (2,.) ou (.,1) car (2,1) va avec (J,M
soit (1,.) ou (.,3) car (1,1) va avec (V,N

Dans la suite nous classerons comme réponses correctes à un essai, 4 réponses élémentaires correctes pour les 4 derniers items (1).

Les réussites pour les épreuves "simples" et produit sont données dans la figure 11 (p.214).

11.4. ANALYSE SUJET PAR SUJET POUR LES REPONSES GLOBALES

Les analyses effectuées ont pour but de tester :

a) l'identification préalable du matériel expérimental,

b) l'influence éventuelle du facteur spatial "gauche-droite", et donc l'homogénéité des 2 relations rg et rd.

c) l'effet de l'ordre de passation des épreuves (son interaction éventuelle avec le facteur spatial) et les "transferts" possibles.

Les points sont étudiés à partir du résultat global de chaque épreuve "gauche"-"droite" selon qu'il est ou non correct dans le modèle mathématique sur l'ensemble des sujets. L'étude des hypothèses avec analyse item par item complète les interprétations faites à partir de ces résultats globaux.

d) L'influence des vérifications dans chaque épreuve (qui se conjugue avec l'effet d'une deuxième passation).

e) L'évolution des réponses (correctes) au long des quatre essais successifs des relations simples, qui comporte des "transferts" intra et inter épreuves

---

(1) Ce critère est plus strict que celui utilisé dans l'expérience précédente: si les résultats s'avèrent meilleurs pour les dominos couleurs (avec ce critère) cela ne peut que renforcer notre hypothèse.

(et recoupe, par une analyse effectuée sujet par sujet, les résultats globaux des points 2 et 3.

f) L'étude de l'évolution génétique des réponses correctes (analyse en fonction de l'âge des points 2 et 3).

g) L'utilisation simple ou combinée des relations rd et rg pour la relation produit (avec l'étude de l'effet de la vérification, de l'évolution génétique) et l'évolution des réponses au cours de l'ensemble des essais, selon les âges.

A - Epreuve préliminaire

Tous les sujets ont réussi les deux parties de l'épreuve préliminaire d'identification des boîtes et des dominos.

B - Relations simples

a) influence du facteur "gauche-droite", en liaison avec l'ordre de passation (24 sujets de 6 à 7;6 ans). rd_1 désigne l'épreuve à la relation "gauche passée en premier. rd_2, rg_1 et rg_2 sont définis de manière analogue. La répartition des sujets en réponses correctes (notées +) et en réponses incorrectes (notées -) est donnée dans le tableau suivant (pour le résultat global de l'épreuve).

	rg_1	rd_1	rd_2	rg_2
+	7	4	7	7
-	7	6	7	3

Donc, pour chacun des ordres de passation la relation "gauche" est légèrement mieux réussie que la relation "droite".

Pour l'une et l'autre relation on observe une amélioration des résultats de l'épreuve passée en second : de façon précise une même relation est mieux réussie lorsqu'elle est passée comme deuxième épreuve.

Cependant, toutes les différences signalées sont du même ordre faibles et ne sont pas statistiquement significatives. De plus il n'y a pas d'interaction entre le facteur "gauche-droite" et l'ordre de passation. Pour les autres sujets, nous avons donc choisi un ordre constant de passation des épreuves : rg_1 rd_2.

C - Influence de l'ordre de passation

Nous allons donner la répartition des sujets selon le couple de leurs réponses à la première et à la deuxième épreuve (résultats définis pour chaque épreuve par les 4 derniers items de l'essai après vérification).

	épreuve 1		
	+	-	
épreuve 2 +	36	13	49
-	4	12	16
	40	25	65

Nous observons donc pour une grande partie des sujets un apprentissage d'une épreuve à l'autre (1) : (les dégradations de performance correspondent à des sujets qui gardent pour l'ensemble de la deuxième épreuve le même système de réponse que pour la première épreuve). Si nous analysons cet effet d'apprentissage en fonction de l'âge, nous obtenons le tableau résumé suivant:

(1) Apprentissage en ce qui concerne le résultat de l'épreuve et a priori non entre les 2 essais successifs des deux épreuves : 1er essai après vérification et 2ème essai "spontané" - cf. plus loin l'analyse essai par essai.

	CP 6 ans	CP 7 ans	CE1 7 ans	CE1 8&9 ans	CE2 8 ans
+ -	3	0	0	1	0
- +	3	3	3	2	2

Donc, hormis un sujet scolairement en retard, c'est seulement à 6 ans qu'on trouve des dégradations à la 2ème épreuve.

Nous allons maintenant analyser l'évolution des réponses selon les essais en étudiant en particulier l'effet des vérifications sur les réponses.

D - Influence de vérification

L'évolution des réponses entre l'essai spontané (S) et l'essai avec vérification (V) d'une même épreuve est résumée dans le tableau suivant sur 65 sujets :

A = essai spontané : -, essai avec vérification : +
D = essai spontané : +, essai avec vérification : -

	1ère épreuve	2ème épreuve	
A	9	4	13
D	1	1	2

Il y a donc globalement entre les essais "spontanés" et avec vérification une amélioration analogue à celle observée globalement sur les résultats aux deux épreuves.

E - L'analyse suivante montre comment s'effectue l'évolution des réponses correctes pour les 4 essais successifs S_1 V_1 S_2 V_2.

Sur l'ensemble des 65 sujets nous obtenons les patterns suivants où "+" dénote une réponse correcte.

Patterns		
1 + + + +	29	
2 - + + +	7	
3 - - + +	8	60 sujets (groupe A)
4 - - - +	4	
5 - - - -	12	
+ + - -	1	
- + - -	2	
+ - + +	1	5 sujets (groupe B)
- + + -	1	

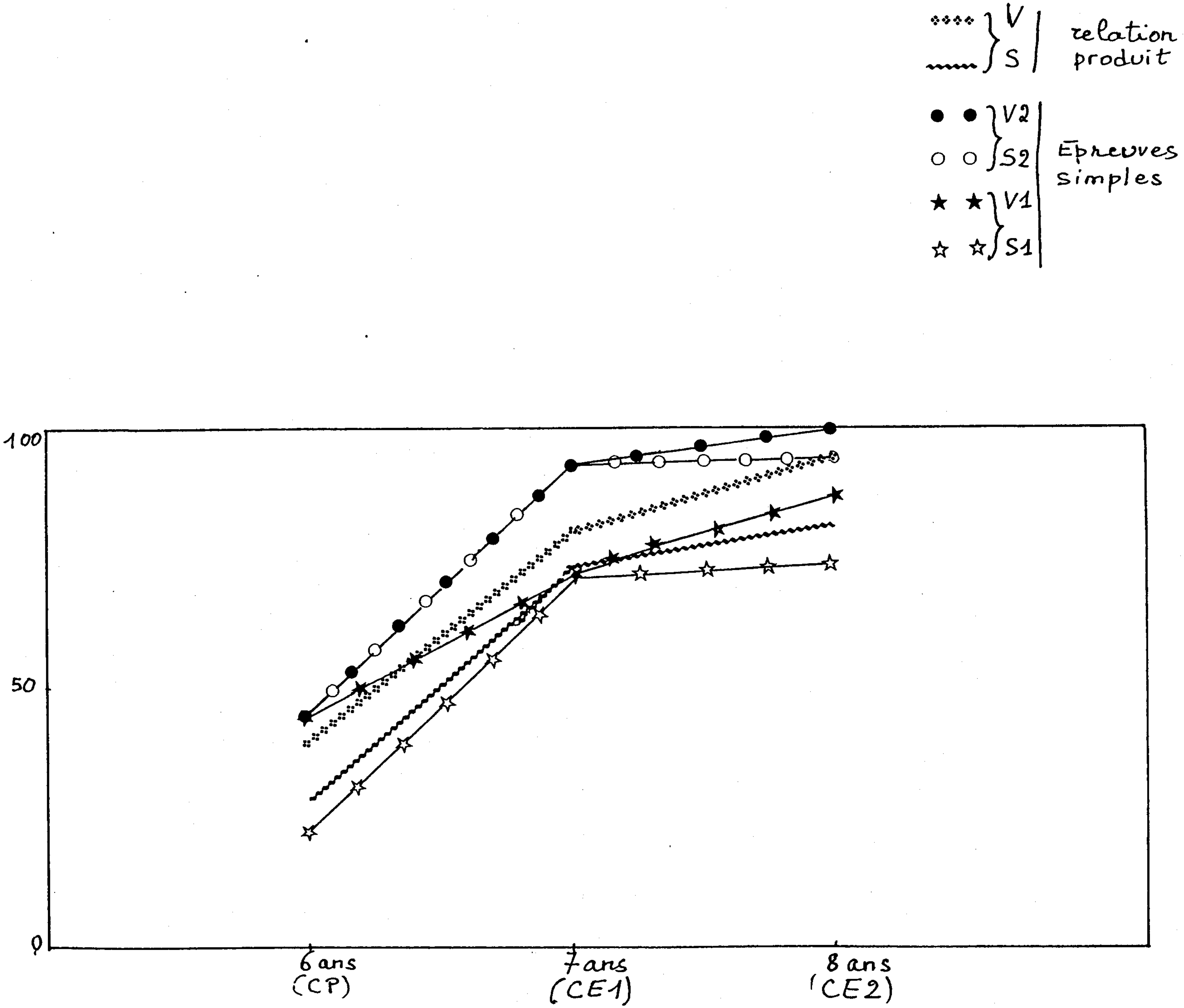
Pour la plus grande partie des sujets il y a ainsi une amélioration continue d'un essai au suivant. (Patterns, 2, 3 et 4).

Rappelons que pour la majorité des sujets la relation passée en deuxième épreuve est la relation rd, légèrement plus difficile que la relation rg ; l'amélioration marquée dans la troisième réponse est donc d'autant plus significative.

F - <u>Etude génétique des réponses aux différents essais</u>

Pour chaque essai, le tableau suivant donne le nombre de réponses correctes dans chaque groupe d'âge (pour les sujets à l'âge "normal" de leur classe) (1)

(1) Cette condition correspond à l'application d'un critère d'homogénéité pour les groupes de sujets de 7 ans et 8 ans : être au même niveau scolaire.



V
S
relation produit
V2
S2
V1
S1
Epreuves simples
100
50
0
6 ans (CP)
7 ans (CE1)
8 ans (CE2)

fig. 11

	S_1	V_1	S_2	V_2	N
6 ans CP	4	8	8	8	18
7 ans CE1	10	10	13	13	14
8 ans CE2	11	13	14	15	15
TOTAL	25	31	35	36	47

La comparaison en pourcentage est résumée dans la figure 11.

Nous avons cherché un critère d'homogénéité des groupes ; nous avons choisi les sujets de même niveau scolaire pour chacun des âges. Ceci augmente l'homogénéité mais il n'y a pas un critère uniforme avec l'âge : (tous les sujets de 9 ans en CM1 ont eu au plus 8 ans au CE2 et 7 ans en CE1, alors que des sujets de 7 ans en CE1 resteront en CE1 à 8 ans). Donc cette "homogénéité" accentue les différences lorsqu'elles sont dans un sens positif, et de façon particulièrement forte la différence entre 6 et 7 ans. (Presque tous les sujets de 6 ans sont en CP).

Pour chacun des essais nous observons un accroissement des réponses correctes entre 6 et 7 ans et une relative stabilité entre 7 et 8 ans. Dès 7 ans on trouve la quasi totalité des réponses correctes au premier essai de la seconde épreuve (93 %).

A 8 ans, 87 % des sujets répondent correctement dès le premier essai avec vérification.

A 6 ans cependant, moins de la moitié des sujets parviennent à une réponse correcte lors du dernier essai (1).

---

(1) La différence entre 6 et 7 ans est accentuée par le fait que nous n'avons pas pris tous les sujets de 7 ans, mais seulement ceux qui sont en CE1 alors que tous les sujets de 6 ans sont dans le premier groupe.

Pour vérifier si les réponses correctes sont éventuellement fonction de l'ordre de présentation, nous allons donner les pourcentages de réponses correctes pour chaque couple de couleurs présentées sur la boîte fermée, en classant les couples selon leur ordre moyen de présentation.

	VM (1,1)	JVi (2,3)	BN (4,2)	JN (3,5)	BM (5,4)
% correct	69	77	59	62	70

(entre parenthèses les ordres de présentations pour S et pour V.

L'ordre de présentation ne semble donc pas être en jeu, mais plutôt le matériel lui-même. Si l'on classe les couples par ordre croissant de "facilité" mesurée par le pourcentage de réponses correctes, on trouve :

- pour les essais spontanés BN, JN / (VM, BM), JVi,
- pour les essais avec vérification (BN, JN), VM, BM / JVi où les "()" désignent les équivalences, et "/" une différence significative.

Dans tous les cas le couple le plus facile JVi est tel que l'un des indices (Vi) est présent dans deux éléments de la correspondance montrée (dans les 4 boîtes ouvertes), les plus difficiles (BN, JN) sont parmi ceux pour lesquels chaque indice n'apparaît qu'une fois dans les 4 boîtes ouvertes.

Pour VM, dont l'un des indices V est présent dans deux boîtes ouvertes) on devrait trouver une meilleure réussite, alors que pour BM (dont les 2 indices ne sont présents qu'une fois) on devrait trouver une moins bonne réussite : il peut y avoir ici un effet de l'ordre de présentation : VM est présenté toujours en premier, BM toujours en dernier.

G - Relation produit

Nous notons les réponses à chacun des essais de la relation produit de la manière suivante :

- G si la relation simple rg est vérifiée (pour les 4 derniers items),
- D si la relation simple rd est vérifiée,
- + si la réponse est correcte,
- - si aucune relation simple n'est vérifiée.

"G" et "D" sont des réponses unidimensionnelles globalement notées "U".

a) Résultats globaux (sur l'ensemble des sujets) pour chacun des essais.

		U			
	+	G	D	-	N
S	35	2	3	25	65
V	42	4	3	16	65

Nous observons donc, sur l'ensemble des sujets une amélioration globale des réponses dans l'essai avec vérification.

Parmi les réponses "unidimensionnelles" aucune relation n'est privilégiée. Nous remarquons d'ailleurs que ces réponses sont peu nombreuses. L'évolution globale des réponses est confirmée par l'étude des réponses de chaque sujet.

Il y a une seule "dégradation" entre les deux essais : un sujet (8 ans ; CE1) passe d'une réponse unidimensionnelle "U" à un échec. Les améliorations de réponses pour les autres sujets sont données dans le tableau suivant :

Evolution		Nombre de sujets
-	"U"	5
-	+	4
U	+	2

Sur les 9 sujets qui passent d'un échec complet à une réponse unidimensionnelle ou à une réussite, 6 sont des sujets de 6 ans. Deux sujets seulement donnent toujours une réponse unidimensionnelle, correspondant à la même relation simple utilisée dans les 2 essais. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment se répartissent et évoluent les réponses selon les groupes d'âge (sujets à l'âge "normal" de leur classe).

b) Evolution génétique

1/ Réponses à l'essai spontané

	+	U	-	N
6 ans ; 6 CP	5 28	0 -	13 72	18
7 ans ; 6 CE1	10 71	2 14	2 14	14
8 ans ; 6 CE2	12 80	1 7	2 13	15
Σ	27	3	17	47

Nous voyons que c'est entre 6;6 et 7;6 ans que se fait l'évolution la plus marquée : dès 7;6 ans le nombre d'échecs complets est négligeable (2/14), alors que ces échecs sont largement majoritaires à 6;6 ans (13/18).

Nous retrouvons ce type d'évolution pour l'essai avec vérification.

2/ Réponses à l'essai avec vérification

	+	U	-	N
6;6	7 39	4 22	7 39	18
7;6	11 79	2 14	1 7	14
8;6	14 93	0 -	1° 7	15
TOTAL	32 68	6	9	47

(° ce sujet donne 4 items "U" mais non successifs.

Nous avons défini un modèle mathématique de même ordre que celui présenté pour l'expérience précédente ("dominos - marques" pour préciser les interprétations avancées ci-dessus : nous définissons deux types d'hypothèses, liées à l'analyse des indices du matériel boîte :

a) une hypothèse correcte, qui conduit de manière certaine à une réponse correcte à chaque item,

b) une hypothèse de réponse selon la présence d'<u>un</u> item commun à la boîte présentée et à une boîte ouverte, avec équiprobabilité de choisir l'une des boîtes ayant un indice (une couleur) commun. Cette hypothèse conduit à une répartition des réponses à chaque item en réponse correcte et réponses non correctes. Enfin, nous supposons dans le modèle que l'absence d'hypothèse soit du type "correct" soit du type "couleur commune", implique une équiprobabilité des réponses.

A partir de ce qui précède, on définit pour chaque item une répartition probable de réponses pour chaque hypothèse. Si on fait alors l'hypothèse qu'à partir du deuxième item d'un essai, les sujets se répartissent selon les trois cas précédents selon les pourcentages α, β, γ, on peut définir la répartition attendue des réponses de l'ensemble de ces sujets pour les quatre derniers items de chaque essai.

La comparaison avec la répartition effective permet de chercher s'il existe bien un triplet α, β, γ, (de somme 100) tel que la répartition effective soit "assez voisine" des répartitions que l'on peut espérer avec α, β, γ.

Nous remarquons que l'amélioration lors de l'essai avec vérification très marquée au CP, ne donne pas un accroissement important du nombre des réussites complètes (5/18 à 7/18).

Le nombre des échecs complets reste important (7/18 = 39 %), bien qu'inférieur au résultat obtenu pour les relations simples.

L'analyse conduite sur le groupe de CP montre que l'hypothèse d'une stabilité des choix d'un indice "pertinent" ne peut être retenue.

H - Réponses aux relations simples et réponse à la relation produit

Nous allons analyser d'abord les réponses par groupe d'âge, mais nous préciserons ensuite sujet par sujet, comment s'effectue le passage des relations simples à la relation double. Pour cela nous donnons d'abord un tableau qui résume les résultats donnés dans les paragraphes précédents.

Succession des réponses pour l'ensemble des essais de l'expérience

Le tableau suivant donne dans cet ordre le nombre de sujets qui donne :

- une réponse correcte au premier essai spontané (S_1+)
- une réponse correcte au premier essai avec vérification (V_1+)
- une réponse correcte au second essai spontané (S_2+)
- une réponse correcte au second essai avec vérification (V_2+)
- une réponse correcte à l'essai spontané pour la relation double (S+)
- une réponse unidimensionnelle à l'essai spontané pour la relation double (Su)
- une réponse correcte à l'essai avec vérification pour la relation double (V+)
- une réponse unidimensionnelle à l'essai avec vérification pour la relation double (Vu+)

	S_1+	V_1+	S_2+	V_2+	S+	Su	V+	Vu	N
6;6	4	8	8	8	5	0	7	4	18
7;6	10	10	13	13	10	2	11	2	14
8;6	11	13	14	15	12	1	14	0	15
	25	31	35	36	27	3	32	6	47

A tous les âges le nombre des réussites spontanées à l'épreuve produit est voisin du nombre des réussites spontanées à la première épreuve simple.

Ces réussites sont en nombre légèrement inférieur aux réussites aux deux épreuves simples. Cependant, nous avons remarqué une amélioration croissante dans les réponses des sujets au cours des essais "simples", correspondant à une facilitation des hypothèses correctes ; cet effet "d'apprentissage" ne se transfère pas entièrement pour la relation double : les réussites partielles elles-mêmes restent inférieures au résultat de la dernière épreuve (30/47 contre 36/47). Le "croisement" de deux relations simples, introduit donc une difficulté supplémentaire. Cependant, lorsque la vérification est possible, les réussites partielles correspondent au résultat de la dernière épreuve à 7;6 et 8;6 ans (27 contre 28) et sont même plus nombreuses à 6;6 ans (11/18 contre 8/18).

Cet effet d'"apprentissage" se retrouve lorsqu'on analyse les réponses de chaque sujet pour les trois épreuves successives. Il est cependant limité car aucun sujet ayant échoué à la succession des essais "simples" ne réussit ni l'épreuve double spontanément ni avec vérification.

De manière plus précise selon les réponses successives de chaque sujet, nous observons :

- au CP (6 ou 7 ans) : tous les sujets qui réussissent spontanément les deux relations simples réussissent aussi spontanément à la relation double (3 sujets) Réciproquement, tous les sujets qui aboutissent à une réussite à la relation double avaient réussi spontanément au moins une épreuve simple (4 sujets). Aucun sujet échouant à la succession des 3 premiers essais ne réussit l'épreuve double (8 sujets) ;

Si on considère maintenant l'intervention des essais avec vérification on observe qu'ils sont déterminants à 6;7 ans, où l'"apprentissage" de constitution d'une hypothèse correcte (simple ou multiple) se poursuit pendant l'épreuve de la relation double, cependant que les réussites simples (et même les réussites partielles pour la relation double) restent faibles (.60) à cet âge là alors qu'elles dépassent .90 à 7;6 ans.

Le nombre de sujets ayant su spontanément faire un changement approprié d'hypothèses (S_1 + S_2 +) est compris entre le nombre de réussites doubles spontanées (S+) et le nombre de réussites "doubles" finales (V+) ;

Le tableau A donne le pourcentage de ces réussites pour les différents âges.

	S+	V_1+S_2+	V+
6-7	.28	.33	.39
7-8	.71	.71	.79
8-9	.80	.86	.93

L'évolution concerne de la même manière, à la fois relation simple et relation double ; elle est marquée par une différence nette avant et après 7 ans.

- au CE1 (7-8 ans), tous les sujets qui réussissent les deux relations simples, dont la deuxième spontanément, réussissent aussi spontanément l'épreuve de la relation double. Seul le sujet qui échoue complètement aux deux relations simples échoue aussi complètement à l'essai avec vérification pour la relation double ;

- au CE2 (8-9 ans), tous les sujets sauf deux, qui réussissent les 3 derniers essais des relations simples réussissent spontanément la relation double. Au niveau des réponses spontanées il y a donc une implication entre :
- la réussite aux épreuves simples,
- la réussite à l'épreuve "double".

11.5. INTERPRETATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

a) L'hypothèse initiale de l'homogénéité des relations que le sujet doit trouver, se trouve confirmée par les résultats.

b) L'effet du facteur spatial est très faible et ce qui est plus important, il y a un transfert d'une épreuve simple sur la suivante :

D'autre part, aucune des relations n'est privilégiée lors de l'épreuve de relation double.

c) Avec de telles relations homogènes il n'y a pratiquement pas de difficulté intrinsèque à la combinaison de deux relations simples : les réussites complètes à l'épreuve de relation double ne sont que de très peu inférieures au résultat de la dernière épreuve simple. Dès 7 ans les sujets dans leur quasi unanimité sont capables d'analyser successivement (S_1 V_1, puis S_2 V_2) comme simultanément (S, V) les indices qui déterminent les relations qu'ils ont à trouver. De plus, dès que les sujets savent faire une hypothèse stable en choisissant un index fixé, ils peuvent utiliser l'autre indice lorsque l'épreuve le nécessite et même il y a facilitation pour fixer un indice correct déterminant la réponse lorsqu'un essai a eu lieu où l'autre indice était déterminant.

L'utilisation de deux indices est d'une très faible difficulté spécifique. Le facteur déterminant dans la construction d'une relation double, après la construction des relations simples qui la composent, apparaît donc comme l'analyse correcte du matériel expérimental qu'on peut définir comme un produit A x B (ici d'indices), cette analyse étant concomittante avec l'hypothèse que chaque réponse simple est effectivement déterminée par un ou deux facteurs A ou B (ici l'un des indices).

d) Si nous comparons cette expérience avec les expériences précédentes de construction de relations entre les produits nous pourrons faire l'hypothèse suivante : le matériel Cg x Cd qu'il faut analyser pour donner chaque réponse, est conçu non comme multiplication de deux dimensions coordonnées mais comme addition de deux indices juxtaposés. Chaque élément est défini par la présence de deux éléments de même nature c'est-à-dire, est une partie à 2 éléments de l'ensemble, réunion des 2 ensembles de couleurs de droite et de gauche.

Le problème pour le sujet est alors, pour une relation simple, de repérer sur 2 indices (6 couleurs) parmi 6 quel est celui auquel associer 1 élément donné parmi 6 (l'animal de gauche, par exemple), la localisation spatiale pouvant intervenir pour faciliter ce repérage.

Selon cette hypothèse, la relation double peut se faire en effectuant successivement les deux repérages d'indices, un pour l'animal de gauche, l'autre pour l'animal de droite ; la spatialisation des indices est un moyen de contrôle de la succession des deux opérations, leur donnant une efficacité aussi grande que celle de chaque opération prise isolément.

Il est clair que l'"imbrication" des dimensions dans un produit F x C tel que ceux utilisés pour la majeure part de notre matériel, ne permet pas ce type de fonctionnement "additif" ; un autre contrôle, lié étroitement à la structure symétrique du produit (où les 2 facteurs peuvent jouer les mêmes rôles) est nécessaire : ce qui apparaît ressortir de ces expériences sur les correspondances produit est la difficulté spécifique à une coordination multiplicative d'opérations de correspondances simples, nécessitant par ailleurs une double analyse dimensionnelle qui présente au préalable ses propres difficultés.

12 - CONCLUSION

Nous avons analysé, au cours de cette partie, de multiples données sur l'acquisition des notions intervenant dans le champ conceptuel de la combinatoire de dimensions. Les résultats obtenus nous permettent d'apporter des réponses aux questions initialement posées (1), de faire des hypothèses sur l'évolution des représentations des enfants, du point de vue de la dimensionalité du produit ensembliste (2), enfin ils nous semblent indiquer des possibilités d'intervention sur les acquisitions dans ce domaine (3).

12.1. Etude du "cortège" des propriétés associées à un produit A x B

12.1.1. L'étude des conduites des enfants, en fonction de leur efficacité (réussites/échecs) et des procédures utilisées, a confirmé la validité de la distinction initiale entre produit homogène et produit hétérogène de deux dimensions, du type F x C. En particulier les procédures de construction de E x E doivent se dégager des représentations liées à $\mathcal{P}$(E), pour se rattacher aux procédures contrôlées par une représentation en produit (§ 7.1.).

Dans les mises en correspondance entre produits (§ 10, 11) les traitements respectifs des produits F x C et $C_1 \times C_2$ confirment également la nécessité de les considérer différemment ; il ressort des résultats l'existence d'une représentation plutôt additive que multiplicative de $C_1 \times C_2$, facilitatrice pour la tâche considérée.

12.1.2. Les conduites des enfants sont compatibles avec une représentation ensembliste du produit à partir du CP seulement : auparavant le respect de l'unicité est une contrainte difficile à intérioriser (§ 6, 7). Une autre remarque sur l'unicité se dégage à partir des résultats de la construction de C x F ; elle ne tient pas aux propriétés des représentations mais à des questions de méthodologie : c'est celle de la signification pour l'enfant de la consigne "ne pas faire de doubles", "ne pas faire 2 pareils". Ainsi on observe des arrêts au cours de la construction de C x F (§ 6)chez des enfants qui traitent pourtant les deux dimensions comme indépendantes (constructions "distributives").La signification attribuée à l'unicité (au-delà du CP, jusqu'au CE2) est très restrictive et contradictoire avec l'exhaustivité.

Cela nous a conduit à modifier la méthode utilisée pour intervenir sur l'unicité, dans la construction des produits homogènes C x C et F x F (§ 7) : l'observateur signale, s'il y a lieu, l'existence du premier double et le fait éliminer. Cette méthodologie nous paraît éviter le problème de signification des termes de la consigne, tout en gardant inévitablement ouverte la question du statut de l'identité de couples de valeurs de deux dimensions.

12.1.3. L'indépendance des dimensions et l'exhaustivité de la construction sont deux problèmes liés.

L'indépendance des dimensions se traduit par la possibilité d'associer des valeurs différentes d'une dimension à une même valeur de l'autre. La construction des "mouchoirs" réalisant F x C (§ 6) indique qu'en CP c'est une minorité d'enfants qui produit spontanément des ensembles "distributifs"; à partir du CE1 la distributivité est respectée par la majorité des enfants ; elle est quasi-systématique au CM1.

L'exhaustivité, étudiée dans toutes les tâches de construction où les enfants sont "relancés" en cas d'arrêt (§ 3 pour C x F, § 7 pour C x C et F x F) nous semble un critère peu discriminatif des représentations, (quant à nos conditions expérimentales).

D'une part, selon le critère retenu -exhaustivité stricte (tous les éléments du produit sont construits une fois), ou exhaustivité large (il peut manquer 1 élément)- on obtient des résultats fort différents. Pour les petites valeurs numériques utilisées, l'exhaustivité large peut être obtenue avec des procédures de type "essais et erreurs" pour peu qu'un contrôle d'unicité soit assuré ; de ce fait, l'exhaustivité large est ainsi respectée par la majorité des sujets. L'exhaustivité stricte pose en revanche des problèmes jusqu'au CE2.

D'autre part, l'exhaustivité de la construction fournit des informations sur le caractère ensembliste "amorphe" du matériel construit. Le respect simultané de l'unicité et de l'exhaustivité nous semble cependant une caractéristique nette des représentations ensemblistes du résultat, évoluant de façon marquée de la maternelle (5;6 ans) au CP (6;6 ans).

12.1.4. La symétrie de traitement des dimensions est quelque chose de difficile à respecter. Un premier acquis concerne les projections du résultat construit sur chacun des ensembles de base. L'existence de procédures régulières, de rangements dimensionnels, ainsi que de mises en correspondance dimensionnelles sont des indices variés de la place, ou de l'absence, des projections sur chaque facteur de base dans les représentations du produit, au moins a priori.

Cependant, les analyses des diverses activités dans les tâches de construction de C x F conduisent à fortement nuancer cette hypothèse.

Le fait que les enfants n'utilisent pas de procédure systématique (toutes les formes d'une couleur donnée, ou l'inverse), ou ne fassent pas de rangement spontané,n'apparaît pas, à soi seul, comme significatif de l'absence de représentations des projections ; il faut relier ces conduites à d'autres observables comme l'efficacité des constructions, les justifications de l'exhaustivité, le dénombrement "en aveugle" de l'ensemble des éléments d'une couleur et/ou d'une forme donnée.

Au-delà du CE2 les enfants produisent des réponses positives à ces dernières questions sans utiliser nécessairement procédures systématiques de construction ou de rangement ; cependant, les plus jeunes enfants (CP à CE) ont besoin d'utiliser explicitement l'une des "projections" dans leur procédure, et/ou dans un rangement, pour contrôler l'exécution de construction (§ 3, 4, 5) : il apparaît un caractère producteur, bien que limité, des rapports entre relations ensemblistes (dans le produit) relations temporelles (procédures) et relations spatiales (rangements).

Par ailleurs, les deux dimensions utilisées (des réalisations variées de formes et de couleurs) sont traitées de façon très asymétrique dans la plupart des tâches.

La "projection" sur la forme est nettement dominante pour les procédures ("balayage" des formes différentes) et pour les rangements, si l'on considère l'ensemble des enfants. Toutefois, pour les enfants de CP la couleur est dominante dans certaines situations, alors qu'en CE2 l'usage des projections sur la forme et sur la couleur sont assez souvent équilibrés .

De façon dominante, avant le CE2, les traitements unidimensionnels sont la règle pour les différentes opérations spontanées (§ 4, § 6, § 8, 9, 10).

La mobilisation d'utilisation de l'autre dimension n'est pas possible pour toute tâche chez les enfants de CP et CE1. En particulier dans le cas de formes non significatives ils ne réussissent pas à effectuer de changement de dimension dans l'analyse d'un matériel F x C (§ 9). En CE2 le changement de dimension reste très peu disponible (§ 9 et 10).

12.1.5. <u>La complémentation dans le produit</u> (construire les éléments qui ne sont pas "carré et rouge") <u>est en rapport étroit avec les représentations du produit</u> : c'est ce qui ressort de l'expérience "négation et produit" (§ 6).

Cette étude comparée des tâches de négation conjonctive et de construction du produit a mis en évidence une étape spécifique (CE2, 2 ans) dans l'évolution : elle se marque par une conduite typique de négation "en contraire". Dans le cas où la négation correspond à un complément dans le produit, cette réponse "en contraire" est compatible avec la succession suivante d'opérations : "faire la négation sur chaque dimension" puis "faire le produit" (succession inverse de celle appropriée). Cependant les résultats de l'expérience complémentaire de négation conjonctive "homogène" (§ 6.2.) indiquent que le domaine de validité de cette forme de négation ne se limite pas à la situation du produit.

12.1.6. Les opérations numériques de dénombrement "en aveugle" des éléments d'une forme ou d'une couleur donnée, ainsi que de prévision des éléments nouveaux à construire, quand on adjoint un nouvel élément à l'un ou à l'autre des ensembles de base, apportent des informations sur la représentation de l'ensemble construit.

L'anticipation impliquée dans la tâche de prévision apparaît de beaucoup la plus difficile - au moins au niveau de la disponibilité des opérations en jeu, qui reste très limitée jusqu'au CM1. Toutefois, à partir du CE2 il est possible de mobiliser des représentations qui permettent l'anticipation d'une adjonction d'élément pour l'un comme pour l'autre des ensembles de base (F et C) (§ 4). Avant cette période de l'évolution, l'asymétrie de traitement des relations apparaît nettement liée à leur mode de réalisation.

12.1.7. Les tâches de construction du produit (F x C) et les opérations effectuées sur un produit hétérogène apparaissent plus faciles que les tâches de mise en correspondance de produits de type F x C : des représentations moins élaborées apparaissent comme suffisantes dans le premier cas pour produire des règles d'action efficaces, dans les modalités utilisées dans nos expériences. En particulier la considération successive de chaque dimension est presque toujours suffisante - dès lors qu'on ne demande pas de produire une règle d'arrêt dans la construction. En opposition avec ces situations, les situations-problèmes où l'enfant doit faire des hypothèses (implicites ou explicites) sur les caractères de la correspondance qu'il doit compléter, exigent d'autres caractéristiques des représentations. Tout d'abord celles-ci doivent être stables : or il apparaît que la constitution d'hypothèses stables de dépendance par rapport à l'une ou l'autre dimension est difficile jusqu'au CM1 (§ 9-10) même pour la seule constitution d'hypothèses unidimensionnelles. De plus, la coordination multiplicative de deux hypothèses unidimensionnelles (stables) exige une représentation symétrique, et une simultanéité de prise en compte de chaque dimension : c'est une difficulté spécifique, non résolue avant le CM2 (§ 9, 10), encore est-il souvent nécessaire de mobiliser la coordination multiplicative de deux hypothèses, qui n'est pas spontanée. L'analyse des informations disponibles apparaît par ailleurs moins opératoire que les effets perçus par l'enfant de ses choix (§ 10).

L'utilisation d'un "produit" homogène $C_g \times C_d$ où l'indexation des ensembles (disjoints) C_g et C_d coïncide avec une disposition spatiale, semble faire intervenir d'autres représentations, plus disponibles, ne supposant pas simultanéité de prise en compte des relations unidimensionnelles, représentations que nous qualifions d'additives (§ 11).

12.1.8. La question des <u>rapports interdimensionnels</u> est apparue au cours des expériences avec le constat du traitement asymétrique des dimensions, dépendant à la fois des réalisations matérielles et des opérations considérées (§ 3, 4, 5, 8, 9, 10). Au niveau des représentations il ne semble pas s'agir d'une dominance systématique d'une dimension, mais plutôt d'une différenciation de la prise en compte relative des dimensions, et d'une fonctionalité différente dans les opérations bidimensionnelles (§ 8, 9, 10). Cette question <u>relève très fortement de la signification du matériel utilisé</u>, et intervient sur le domaine de validité des propriétés des représentations de la combinatoire de dimensions du type forme et couleur.

12.1.9. Les relations ensemblistes et spatiales apparaissent avoir des rapports importants, qui dépendent à la fois de l'évolution et des opérations qui font appel à ces relations. Les mises en rapport des propriétés ensemblistes et spatiales ne sont pas spontanées pour nombre de jeunes enfants : cela se traduit à la fois dans la relative limitation du nombre des rangements spontanés et même suscités (§ 4) et par une opéra tivité limitée (§ 3, 4). Le caractère producteur des rangements pour l'exhaustivité des constructions est limité par l'état des acquis des enfants.

La disposition spatiale de produits joue un rôle dans les mises en correspondance et facilite les prises en compte unidimensionnelles ou bidimensionnelles, mais cet effet producteur a des limites assez étroites (§ 8).

En ce qui concerne les relations ensemblistes et temporelles, l'analyse des procédures de construction de C x F (§ 3) indique que les rapports sont relativement lâches dans une situation où ne sont pas introduites de contraintes particulières de ce point de vue ; le faible nombre de procédures exprimant des relations ensemblistes dans l'adjonction d'un pélément lors de la construction de E x E (§ 7) confirme, qu'avec les petits cardinaux utilisés, les enfants peuvent avoir des moyens de contrôle de leurs productions qui ne se traduisent ni sur le plan des relations spatiales, ni sur le plan des relations temporelles.

12.1.10. Une surprise : les marques de l'évolution du CE1 au CE2 (autour de 8 ans) ont des caractères assez paradoxaux : dans plusieurs tâches, avec des groupes d'enfants différents, nous avons observé une baisse - souvent faible mais pas toujours. - du nombre des réponses correctes à certaines questions, entre le CE1 et le CE2 (alors que pour d'autres tâches on observe des modifications notables "positives"). Cette régression apparente des enfants, rencontrée ailleurs par d'autres psychologues (R. Samurçay, 1984), nous semble correspondre à une réorganisation profonde des représentations. Au cours de cette réorganisation les anciennes règles d'action peuvent devenir inopérantes alors que de nouvelles - appropriées aux nouvelles représentations - ne sont pas encore en place. Plus précisément, nous allons maintenant donner nos hypothèses générales sur l'évolution des représentations, qui nous permettront d'expliciter davantage ce problème de réorganisation.

12.2. Hypothèses sur les représentations des enfants du point de vue de la dimensionnalité du produit : évolution génétique

Globalement, l'augmentation de la variété des tâches réussies est un indice observable de l'enrichissement du champ conceptuel sur la combinatoire ensembliste ; toutefois nous ne pourrons pas, avec nos études synchroniques, dégager une hiérarchie assurée dans cette évolution.

Dans un premier temps - vers 5 ans (en maternelle) - alors même que les matériels de base A et B sont l'objet d'opérations ensemblistes, le matériel produit par combinaison des éléments de A et des éléments de B ne fonctionne pas nécessairement comme un ensemble. La contradiction entre l'unicité des couples et l'indépendance des dimensions peut conduire à des réplications d'éléments de A x B, non contrôlables par l'enfant, ou à une limitation des productions à une partie de A x B où sont représentés chaque ensemble de base ; les projections sont bien sur A et B, mais il y a le minimum d'éléments "au-dessus" de chaque point de A ou B.

Ensuite, vers 6 ans (CP), le matériel construit par combinaison a bien les propriétés ensemblistes. Cependant il ne semble pas être, pour l'enfant, la solution unique au problème posé : cela se manifeste essentiellement (1) par l'absence de règle d'arrêt. L'enfant serait alors par

(1) Un enfant a explicitement demandé "Est-ce que les autres ont trouvé comme moi" ? Mais il y a un problème méthodologique difficilement soluble pour obtenir des explicitations significatives de ce type. En effet la production spontanée d'une telle remarque n'a pas le même sens qu'une réponse sollicitée par une question de l'expérimentateur. Nous pensons qu'elle n'a rien d'anecdotique, mais sa répétabilité est difficile à obtenir.

rapport à cette tâche comme un adulte à qui on demanderait de donner toutes les rimes au mot "stridence". A un autre niveau de problème combinatoire, la question de l'exhaustivité peut avoir un statut de ce type pour des élèves plus âgés (Balacheff, 1982).

De plus, à ce niveau, l'ensemble construit - inclus dans A x B - est peu structuré : certes, l'une au moins des projections sur A ou sur B est disponible ou peut être mobilisée, permettant en particulier des classifications (rangements), mais ces opérations se composent mal avec d'autres ; les projections de produits de mêmes dimensions sont très difficilement mises en relation, même de façon unidimensionnelle.

Par ailleurs, le domaine de référence et les réalisations de A et B paraissent jouer un rôle important : c'est une première limitation du domaine de validité des représentations. Une seconde limitation porte sur le cadre temporel : la représentation trop peu structurée de A x B ne permet pas l'anticipation : les prévisions sur l'effet de l'adjonction d'un élément à A ou à B ne sont pas disponibles, elles ne sont le plus souvent pas mobilisables, et jamais pour les deux dimensions.

Ultérieurement, vers 7 ans (CE1), la représentation de A x B semble avoir un caractère plus structuré, mais structuré de façon asymétrique et à dominante "additive", comme un espace fibré au-dessus de l'une des dimensions. A la projection sur cet ensemble de base est associée la classe d'équivalence correspondante : elle est le plus souvent isomorphe à l'autre ensemble ; ainsi le dénombrement "en aveugle" du nombre de carrés - par exemple - est possible s'il y a organisation au-dessus des formes, mais l'anticipation n'est pas disponible pour autant. Les sections du type $\{c\}$ x F n'ont pas nécessairement d'existence, mais la mobilisation de leur représentation peut fournir un critère de complétion, par utilisation par l'enfant de l'isomorphisme de $\{c\}$ x F avec l'ensemble de base F. Les opérations de négation, mises en relation, prévisions sont possibles (spontanément ou avec mobilisation) : elles sont unidimensionnelles.

Vers 8 ans (CE2) se situe une étape importante : une réorganisation des représentations a lieu, qui se manifeste par la baisse paradoxale de certaines performances et la transformation notable de certaines réponses. L'ensemble A x B commence à se structurer de façon symétrique par rapport à chaque dimension. Certaines opérations sont spontanément bidimensionnelles, comme la négation, pour d'autres on peut mobiliser l'utilisation successive ou simultanée des deux dimensions ; ainsi les anticipations sur l'adjonction d'un élément sont mobilisables - qu'on ajoute une forme ou une couleur - mais si les projections sont composables avec des applications disjointes de C sur C' et de F sur F', la composition multiplicative du résultat n'est pas encore mobilisable. Dans cette même période, la symétrie des couples (a, b) et (b, a) d'un produit E x E est utilisable dans des procédures systématiques de construction ou d'adjonction.

Ensuite, vers 9 ans (CM1) le produit A x B est représenté avec son cortège de relations et d'applications (isolément) composables ; (le dénombrement multiplicatif de l'ensemble produit est disponible). Le domaine de validité des opérations n'est plus limité par les réalisations matérielles, les produits hétérogène et homogène se "rapprochent" - quant au traitement de leur construction tout au moins. Cependant, la composition multiplicative d'applications est encore difficile : elle sera mobilisable un peu plus tard (vers 10 ans, au CM2) mais avec un domaine de validité moins large que pour les autres opérations :la maîtrise d'hypothèses bidimensionnelles sur les relations entre produits reste limitée. Cela est à mettre en rapport avec les conclusions obtenues par ailleurs sur la coordination de relations comme "devant/derrière" et "droite/gauche" (Meyer, 1935).

Du point de vue de l'évolution des représentations de la "dimensionalité" on peut ainsi distinguer : une période d'acquisition des opérations unidimensionnelles, où la nature même des dimensions joue un rôle très important, une phase de réorganisation - qui semble assez brève - avec symétrisation du statut des dimensions - conduisant à une première mise en oeuvre de la bidimensionalité, enfin une période d'extension du domaine de validité des opérations bidimensionnelles, à la fois quant au caractère des ensembles de base et aux opérations à effectuer.

12.3. Peut-on agir sur l'évolution des acquisitions sur la dimensionalité ?

Nous avons étudié des acquisitions cognitives, compte-tenu d'un enseignement très réduit, sinon absent sur les questions correspondantes (cf. Partie IV, infra). Peut-on, de cette étude, inférer des éléments sur une intervention possible ?

Des travaux ont déjà été conduits au niveau du CP ; ils montrent (Pinelli, 1978)la possibilité d'intervention pour certaines des opérations concernant le produit : essentiellement la construction d'un produit s'inscrivant dans le cadre spatial d'une "matrice avec marges". Nous avons vu que cette perspective de relation étroite avec l'organisation spatiale n'était pas exhaustive par rapport aux différentes opérations qui font partie du champ conceptuel de la combinatoire des dimensions. De plus, la longue durée de l'évolution - qui couvre toute la période de l'enseignement primaire - rend peu plausible l'idée qu'une intervention limitée ait une large efficacité.

Nous n'avons pas expérimenté d'apprentissage, ni de séquences didactiques, mais certaines des observations faites nous semblent indiquer des points et des modes d'intervention possibles, qui touchent à des niveaux d'acquisition différents.

Il nous paraît nécessaire tout d'abord de sortir du cadre des dispositions spatiales dont le rôle producteur peut occulter des obstacles rencontrés par les enfants au niveau des représentations, de s'appuyer - néanmoins - sur ces effets producteurs mais en introduisant des contraintes qui imposent de dépasser ce cadre. Par exemple : donner des tâches de modifications des rangements spontanément fournis par des enfants (CP, CE1 : voir le protocole de Dom), ou confronter des rangements différents de plusieurs élèves, pour conduire à l'utilisation de la dimension actuellement dominée ou occultée par l'autre ; mettre en conflit les relations numériques dans le produit cartésien et dans le produit spatial pour induire une analyse préalable du matériel (CE)

Ensuite, dans l'acquisition de la bidimensionnalité, deux propriétés des représentations pourraient être un objet d'intervention particulière : d'une part le domaine de validité, d'autre part la symétrisation des dimensions. La variation des dimensions utilisées, ainsi que celle des réalisations matérielles - assortie de tâches d'identification - est, nous semble-t-il, une méthode possible quant au premier objectif. En ce qui concerne le second, un questionnement systématique sur la dimension non spontanément mise en oeuvre, dans des tâches diverses (dénombrements, analyse d'un matériel, anticipations sur l'adjonction...) nous paraît une méthode productive, en tout cas à un certain moment de l'acquisition (autour de la phase de réorganisation, CE2).

Enfin, il nous paraît possible et nécessaire de considérer les développements qui suivent l'acquisition de la bidimensionalité, en continuant à faire intervenir la variété des situations-problèmes. En particulier les tâches de mises en correspondance de produits, qui nécessitent de faire des hypothèses stables et de les composer, nous semblent susceptibles de contribuer au renforcement et à l'élargissement des acquisitions sur la bidimensionalité. Cela pourrait être mis en rapport avec l'enseignement scientifique et le travail d'élaboration - puis de test - d'hypothèses sur les facteurs intervenant dans un phénomène donné : si ces facteurs interviennent de façon indépendante on est dans le cas d'une organisation de type multidimensionnel, dont la représentation pourrait s'appuyer sur les acquis de la combinatoire des dimensions.

PARTIE III

1. Description des dispositifs expérimentaux
   Méthode d'analyse des réponses ... 2
2. Comparaison globale des réussites ... 18
3. Invariants spatiaux: topologiques, affines et métriques conservés dans les réponses ... 29
4. Invariants dimensionnels ... 36
5. Les invariants d'orientation ... 45
6. Etude de la situation "despatialisée" d'identification des carrefours: signification des réponses; effets ultérieurs sur le repérage ... 58
7. Conclusion ... 62

1 - DESCRIPTION DES DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX - METHODE D'ANALYSE DES REPONSES

Rappelons qu'il s'agit d'étudier les propriétés que les enfants mettent en oeuvre pour repérer une position d'un point dans un plan, dans la situation particulière où le plan est "discrétisé" et organisé selon un quadrillage régulier, simple. L'objectif principal est d'analyser les différents invariants spatiaux utilisés par les enfants, et plus particulièrement les invariants dimensionnels (conservation de la position de chaque coordonnée).

Nous allons décrire d'abord les dispositifs expérimentaux : le matériel, les caractères des positions à repérer, les transformations spatiales éventuelles, la procédure expérimentale ; nous donnons ensuite un tableau synoptique des situations et des sujets ; enfin nous présentons le mode d'analyse des résultats : classification des réponses, des sujets.

Les chapitres suivants concerneront les différentes analyses effectuées : comparaison globale des résultats, utilisation des invariants spatiaux (topologiques, affines, métriques), les invariants d'orientation, de développement des invariants dimensionnels, ainsi que la comparaison d'un repérage "déspatialisé" avec les repérages "spatialisés" sur quadrillage.

1.1. Repérage spatial

Le sujet et l'expérimentateur disposent chacun devant lui d'un matériel analogue.

1.1.1. Matériel expérimental

Les points à repérer sont des intersections d'un quadrillage 6 x 6 de bandes plastifiées de 10 mm de large régulièrement disposées sur un carré de bois naturel de 25 x 25 cm (cf. Fig. I). Les intersections sont matérialisées par des punaises fixes de 12 mm de diamètre, recouvrant l'intersection. Une punaise magnétique, de 12 mm de diamètre sert au repérage. Nous la désignons par la suite par le terme de "pion". (Un pion pour l'expérimentateur qui la place sur son quadrillage, et un pour le sujet). Une marque rouge identifie un des angles du quadrillage pour désigner implicitement une origine au repérage.

Deux réalisations différentes de quadrillage ont été utilisées pour analyser les éléments pris en compte par les enfants pour placer leur pion au même endroit du quadrillage que celui de l'expérimentateur, comme le leur demande la consigne (cf. infra) :

- quadrillage noir : les bandes sont uniformes, noires ; ce quadrillage est codé dans la suite : N ;

- quadrillage couleur : chacune des (12 bandes) est d'une couleur qui lui est propre : un carrefour (intersection) est ainsi identifiable de façon intrinsèque, sans tenir compte de sa position spatiale ; ce quadrillage est noté dans la suite : C.

1.1.2. Nature des positions à repérer

La Figure 1 indique les 16 positions successivement occupées par le pion de l'expérimentateur.

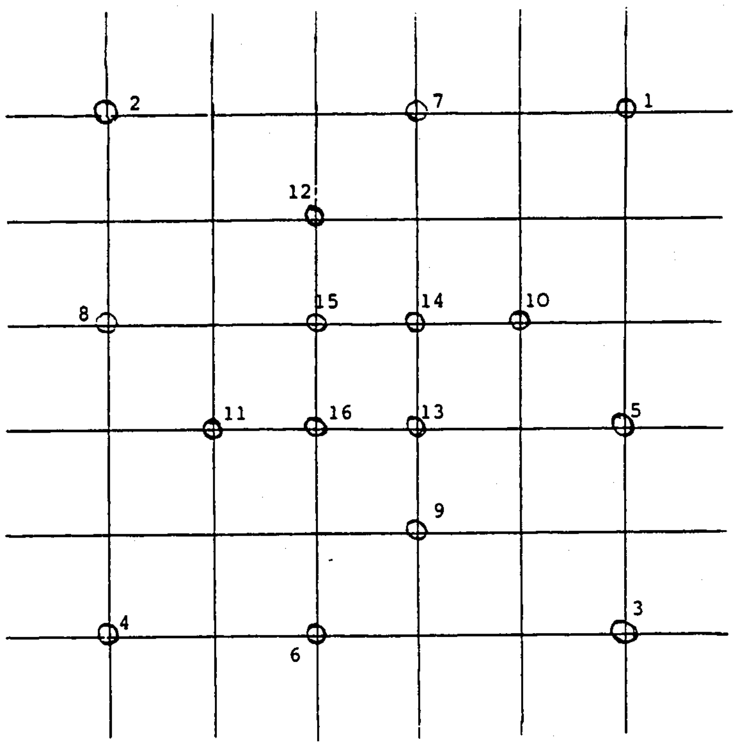


FIG. I

L'ordre indiqué est celui qui va du centre du quadrillage vers le bord, ordre utilisé avec tous les matériels. Nous avons utilisé également l'ordre inverse dans certaines situations pour repérer l'existence d'effets spécifiques à cet ordre de succession des positions.

Nous avons choisi des ordres très contrastés, faisant repérer d'abord soit tous les points du centre (dont nous pensions qu'ils étaient les plus difficiles) soit tous les points des angles (dont nous faisions l'hypothèse de la plus grande facilité).

En fonction de nos objectifs, nous n'analysons pas les déplacements d'une position à une autre, mais nous avons à choisir deux ordres fixes pour tous les sujets, dans toutes les conditions pour nous permettre d'apprécier l'existence de certains effets.

Par ailleurs, sur le plan de la conduite de l'expérience, l'expérimentateur prenait soin de ne pas déplacer horizontalement son pion mais de le retirer nettement au-dessus du quadrillage avant de le placer sur une nouvelle position.

Certaines réactions d'élèves en cours de passation indiquent bien une prise en compte probable des déplacements (1), cependant l'analyse détaillée des protocoles ne montre pas de phénomène massif spécifique, ni qualitatif, ni quantitatif.

---

(1) Ainsi en est-il de certains commentaires d'enfants précédant leur action dans la situation "déspatialisée" des carrefours, où il n'y avait pas de déplacement du pion de l'expérimentateur : "le pion, il va là". Nous disons qu'une telle situation est "déspatialisée" parce que les "places"du pion de l'expérimentateur sont présentées par des indices de couleurs, et non situées dans un repère.

. Classification des positions à repérer :

Les 16 positions que l'enfant doit successivement repérer se répartissent en 4 groupes, regroupés en 2 catégories :

- les 4 sommets, notés S,
- les 4 autres points du bord, notés B, formant les 8 points du groupe "frontière", noté F (distingués entre eux par des propriétés "affines") ;
- 4 points médians, notés M,
- les 4 points du centre, notés C, formant les 8 points du groupe "intérieurs" noté C (distingués entre eux par des propriétés "métriques" : être plus ou moins loin du bord.

Les 4 points de chaque groupe sont présentés en succession, et l'ordre entre groupes est S-B-M-C (ordre B ⟶ C) ou C-M-B-S (ordre C ⟶ B).

1.1.3. Disposition des quadrillages

Trois situations ont été utilisées, où les transformations spatiales faisant passer du quadrillage du sujet - QS - à celui de l'expérimentateur - QE - étaient les suivantes :

- situation "côte à côte" : le sujet et l'expérimentateur sont côte à côte ; c'est une translation (de l'ordre d'une quarantaine de centimètres) qui fait passer de QS à QE (rotation : 0°) ;

- situation "biais" : le sujet et l'expérimentateur sont placés environ à 45°, à peu près à la même distance que précédemment (rotation : 45°) ;

- situation "face à face" : le sujet et l'expérimentateur sont face à face, toujours à la même distance ; une rotation de 180° fait passer de QS à QE (plus translation).

La figure 2 donne le schéma de ces trois situations.

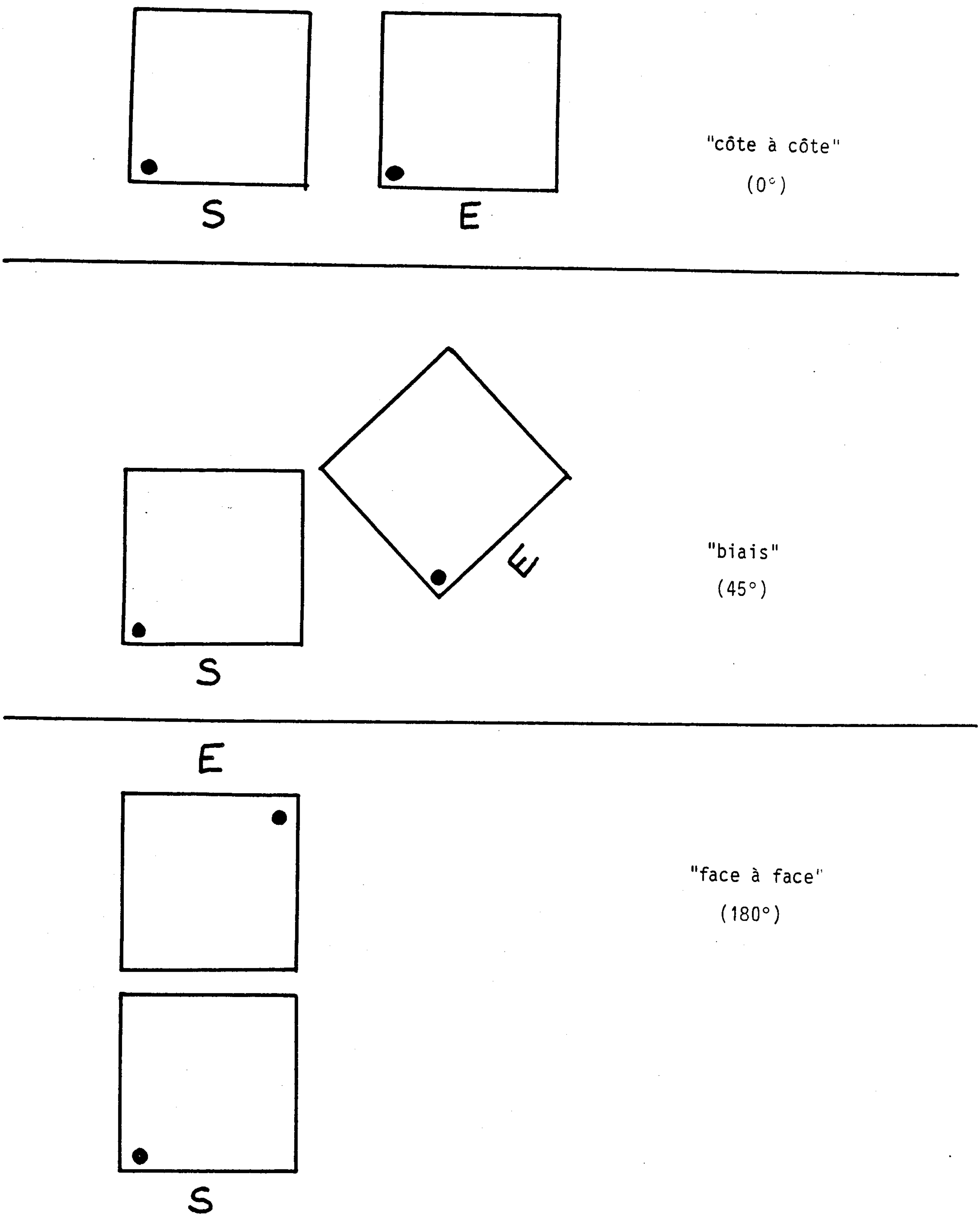


Figure 2

L'hypothèse faite sur ces situations est, bien entendu, que la situation côte à côte (codée "0°") serait plus facile que celle du biais (codée "45°"), elle-même plus facile que celle de face à face (codée "180°") - où l'on devrait s'attendre à de nombreuses réponses "en miroir".

Une raison plus spécifique a conduit à l'introduction de la situation de biais : les analyses sur les mouvements oculaires lors de situations de repérage (Vurpillot 1968, Baudonnière et Pécheux 1978) ont mis en évidence l'importance des balayages "horizontaux". En situation côte à côte, le prolongement visuel des "horizontales" peut être utilisé par les enfants dans le repérage ; cette possibilité est supprimée dans la situation biais, mais le sujet par un mouvement approprié du tronc et/ou de la tête peut se placer par rapport à QE dans une position similaire à celle occupée - sans mouvement - dans la situation côte à côte. (L'enfant peut ainsi conserver le même point de vue par rapport à QE et à QS).

Nous devons préciser que l'expérimentateur s'est toujours place à droite du sujet : notre objectif était en effet non pas l'analyse des activités spatiales ès qualités mais l'étude de la construction de la composition multiplicative de repérages unidimensionnels. Le respect de l'orientation (gauche/droite) dans le repérage horizontal est un des éléments de notre étude - qui nous permet essentiellement de situer nos résultats par rapport à ceux des travaux effectués sur l'espace. Nous avons néanmoins analysé les effets possibles de cette place de l'expérimentateur pour la situation "côte à côte" avec le quadrillage noir, en comparant les réponses données par les enfants sur les positions situées "du côté de l'expérimentateur" et sur les positions opposées (sur l'horizontale).

1.1.4. Procédure expérimentale

Après la familiarisation avec le matériel (identification sur les deux quadrillages du sujet et de l'expérimentateur des "chemins" et des "carrefours"), la consigne suivante est donnée :

"Tu vois, je place mon pion ici (un point intérieur du quadrillage, non utilisé par la suite) sur ma planche, place le tien pareil sur ta planche, sur le même carrefour". La compréhension de la consigne n'a posé de problème pour aucun de nos sujets après une ou deux corrections.

La situation face à face n'a jamais été présentée directement, mais toujours précédée d'une première situation de repérage "direct" à partir des positions sur QE (situations N et C) soit à partir des seuls carrefours (situations C et Nm, voir infra, § 2 et 3).

1.2 - REPERAGE "DESPATIALISE"

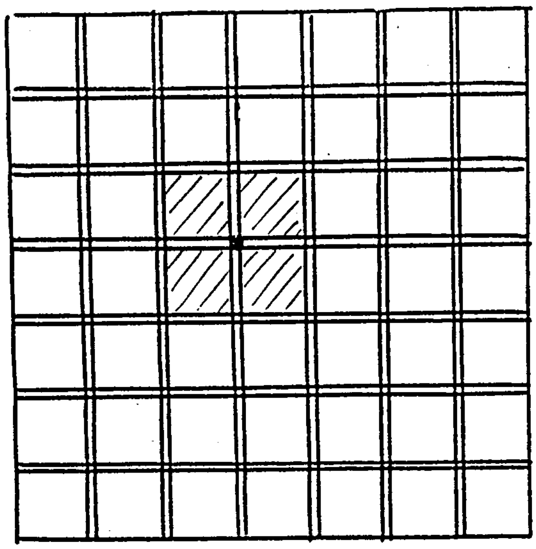
Rappelons que cette situation a été introduite pour étudier plus précisément le repérage intrinsèque possible dans le quadrillage couleur : lorsque celui-ci n'est pas utilisé par l'enfant s'agit-il d'une difficulté à utiliser les éléments du produit cartésien sous-jacent $C_1 \times C_2$ ou s'agit-il de l'effet d'un traitement directement et seulement spatial d'une tâche considérée de ce (seul) point de vue (identifier des positions, non des carrefours individuels) ?

1. 2.1. Matériel

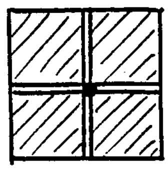
Le sujet dispose d'un quadrillage couleur et d'un pion. Les carrefours sont individuellement réalisés par l'intersection de deux bandes de couleur, recouverte d'une punaise, disposées sur un carré de bois naturel de même taille que celui contenant le carrefour sur le quadrillage lui-même. (cf. Fig. 3).

1.2.2. Procédure expérimentale

On présente au sujet la succession des 16 carrefours correspondant aux 16 positions de la figure 1, du centre vers le bord. Pour chaque carrefour, le sujet doit placer son pion sur "le même carrefour" de son quadrillage. On corrige après chaque réponse "Carr." Cette partie, appelée "Carrefours" et notée "Carr." dans les tableaux suivants est précédée d'une phase de fami-



Quadrillage



Carrefour

Figure 3

liarisation analogue à celle décrite pour le repérage spatialisé.

1.2.3. Repérage spatialisé "médiatisé"

Nous plaçons sous cette rubrique les épreuves de repérage spatialisé qui sont précédées d'une épreuve de repérage "carrefour". Deux situations ont été utilisées :

- après l'épreuve "carrefours", les sujets passent à la situation couleur en face à face ; situation notée "Carr $\rightarrow$ C, 180°"

- après l'épreuve "carrefours", les sujets passent deux épreuves spatialisées (0° à 180°) avec le matériel suivant : l'expérimentateur dispose du quadrillage couleur (utilisé par le sujet dans l'épreuve précédente des carrefours) ; le sujet dispose d'un quadrillage dit "noir marque", codé Nm, de même dimensions que le quadrillage noir, avec des bandes noires, mais l'extrémité gauche des "horizontales" et le bas des "verticales" sont marqués chacun d'une couleur identique à celle du quadrillage couleur (1). Un repérage intrinsèque est donc possible, en se référant au quadrillage dans son ensemble.

Le quadrillage Nm du sujet et C de l'expérimentateur sont placés d'abord côte à côte puis face à face, pour effectuer les comparaisons avec les deux autres types de quadrillage (N et C). L'ordre de présentation des positions est toujours (C $\rightarrow$ B).

---

(1) La position des marques de couleur est celle qu'on utilise fréquemment dans le codage d'un repère de $\mathbb{R}^2$ dans les manuels scolaires.

1.3 - LES SUJETS

Les sujets sont des enfants de 4 à 9 ans, répartis en groupes d'âge moyens : 4;6 - 5;6 - 6;6 - 7;6 et 8;6 ans, d'écoles maternelles (les groupes d'âges 4;6 et 5;6 ans) et primaires d'écoles mixtes urbaines (Paris et proche banlieue). Les enfants sont à "l'âge normal" de leurs classes, auxquelles nous nous référerons par la suite.

Le tableau I donne l'effectif des sujets pour chacune des situations ; les lettres en indice indiquent qu'il s'agit des mêmes sujets pour la situation de face à face que pour la situation ayant le même marquage dans les carrefours ou la situation côte à côte. (p. 16)

(Ainsi 14 sujets de CP ont passé l'épreuve "carrefour 2", l'épreuve "Carr ⟶ Nm" en côte à côte, l'épreuve "Carr ⟶ Nm" en face à face : leur groupe est codé 14b).

Le plan d'expérience n'est pas complet car certaines situations ont été introduites pour des questions particulières posées par des situations précédemment analysées, et mettant en jeu des comparaisons locales. Quant à l'effectif des différents groupes, il dépend de la répartition des âges dans les classes des écoles où les passations ont été effectuées (et de la présence effective des enfants lors des séances de passation).

1.4 - METHODE D'ANALYSE DES RESULTATS

1.4.1. Nous effectuons des analyses de différents ordres :

1) En termes de correction des réponses (analyse globale : ceci nous permet d'effectuer un premier niveau de comparaison entre les situations, et de dégager de grandes lignes dans l'acquisition du repérage plan.

La comparaison des réponses par groupes (en termes de nombre total de positions correctement repérées (1) et des réponses par sujets (en termes

---

(1) Le tableau II donne la distribution du nombre de réponses dans les différentes situations. (p. 17).

de nombre de sujets effectuant un repérage globalement correct des positions) permet d'affiner ce premier niveau d'analyse.

2) En termes d'invariants spatiaux : nous analysons les réponses données selon les différents types de positions (frontière/intérieur) pour étudier l'utilisation d'invariants topologiques (pas de confusion entre frontière et intérieur du quadrillage), d'invariants affines (les points des "angles" du quadrillage sont différenciés des autres points du bord), d'invariants métriques (l'éloignement des points par rapport au bord du quadrillage est qualitativement respecté).

3) En termes d'invariants d'orientation des deux directions "horizontale" et "verticale" : nous analysons les "réponses en miroir" et les autres réponses pouvant provenir de transformations spatiales à la fois pour étudier la mise en oeuvre d'invariants d'orientation au cours du repérage et pour analyser les transformations spatiales éventuellement effectuées (mentalement) par les enfants pour compenser en particulier les changements de point de vue pour les situations biais et face à face.

4) En termes d'invariants dimensionnels : nous étudions la conservation des deux directions qui déterminent l'organisation du quadrillage et qui sont, par rapport au sujet "l'horizontale" (c'est-à-dire la direction "horizontale" située dans un plan fronto-parallèle) et la "verticale" (la direction perpendiculaire à l'horizontale).

1.4.2. Les réponses des sujets sont classées en fonction de ces analyses :

a) Une première classification est faite en termes de réponse correcte : la position du pion sur QS est identique à celle du pion sur QE.

b) Une deuxième classification est faite en fonction de l'étude des invariants spatiaux généraux :

. classification des erreurs topologiques et affines,
. classification des transformations faisant passer de la donnée sur QE à la position fournie par le sujet sur QS.

- symétrie verticale (échange droite/gauche notée Sv)

- symétrie horizontale (échange haut/bas) notée Sh),

- symétrie centrale (échange haut/bas et gauche/droite , rencontrée dans la situation face à face) notée Shv ;

(cette classification ne s'identifie pas à l'interprétation qui sera donnée à ces réponses).

c) Une troisième classification est centrée sur la conservation de l'une et/ou l'autre des dimensions :
. h + horizontale conservée
. v + verticale conservée.

Dans la classification des réponses erronées h + désigne les réponses où l'horizontale (seule) est conservée, qui ne coïncident pas avec une réponse "en symétrie" (qui - d'une certaine façon-conserve la position verticale, mais après une transformation spatiale erronée) ne respectant pas l'orientation gauche/droite sur l'horizontale).

Du point de vue méthodologique, il faut remarquer que pour certaines positions une erreur de position verticale sur la bonne horizontale peut produire une réponse de type Sv, et que - corrélativement - une transformation "en miroir" et une erreur de position verticale peuvent conduire à une réponse "correcte" : ceci pose évidemment des problèmes lors de l'interprétation des résultats statistiques sur les réponses. Nous avons donc effectué également une classification des sujets.

1.4.3. Classification des sujets

Les sujets sont classés en fonction d'une part du caractère "globalement correct" de leurs réponses et d'autre part en fonction de l'utilisation éventuelle de la transformation Sv (dominante, et la seule nettement significative dans les analyses des divers auteurs ayant travaillé sur les repérages).

---

(1) Nous entendons par "simple erreur" une erreur de 1 unité dans le repérage si on le considère en termes de repérage cardinal ou ordinal.

. Classification selon la correction des réponses :

Nous définissons trois groupes de sujets selon leur nombre d'erreurs :

R = sujets faisant 0, 1 ou 2 erreurs sur 16 réponses ;
I = sujets faisant de 3 à 8 erreurs ;
E = sujets faisant 9 erreurs ou plus (plus de 50 % de réponses fausses).

Pour chaque groupe de 4 points (S, B, M, C) nous pouvons définir de manière analogue :

r = sujets faisant 0 ou 1 erreur ;
i = sujets faisant 2 erreurs ;
e = sujets faisant 3 ou 4 erreurs (plus de 50 % de réponses fausses).

Le choix de ces catégories a été fait en séparant les sujets qui ont moins de 50 % de réponses correctes (sujets "échouant" à la tâche de repérage), et parmi les autres en distinguant ceux qui font "peu" d'erreurs. Sur l'ensemble des 16 réponses nous avons comparé les résultats obtenus pour la classification avec le critère "0, 1, ou 2 erreurs" et celle avec le critère "0, 1, 2 ou 3 erreurs" pour apprécier le caractère plus ou moins stable - et alors considéré comme significatif - de la classification de la "réussite". Il n'y a que quelques cas où les résultats des 2 classifications diffèrent nettement. Ces cas isolés sont signalés dans le tableau IV (chapitre suivant), avec l'indication du résultat selon la 2ème classification.

. Classification selon le nombre de réponses "en miroir" avec deux niveaux (emboîtés)

- MD : sujets faisant au moins 50 % de réponses Sv, "en miroir" (Sv "dominant")
- MS : sujets faisant 14, 15 ou 16 réponses en miroir (Sv "strict")
- MO : sujets faisant moins de 50 % de réponses en miroir.

L'ensemble des données constituées à partir de ces diverses classifications (non indépendantes) est analysé dans les chapitres qui suivent, en fonction des différentes questions présentées, avec les objectifs suivants :

. comparaison globale des différentes situations de repérage ;

. comparaison des situations de repérage intrinsèque possible (quadrillage couleur) et du repérage proprement spatial (quadrillage noir) avec :

- comparaison des réponses en situation côte à côte, pour les deux ordres de présentation des positions à repérer,

- informations apportées par l'épreuve de repérage "déspatialisé" (situations "carrefours"),

- passage du repérage intrinsèque à l'indexation sur chaque dimension (utilisation du quadrillage "noir marqùé") ;

. étude du statut des différents invariants intervenant dans le repérage :

- invariants topologiques et affines,
- invariant d'orientation,
- invariants dimensionnels.

L'analyse des effets de la disposition relative des deux quadrillages du sujet et de l'expérimentateur permet une approche du domaine de validité des acquis de repérage plan.

Ages	Carrefours		Angle de rotation = 0°				45°	Angle de rotation 180°						
	Carr 1	Carr 2	C C → B	N C → B	C → Nm (C→B)	N+C B→C	N C→ B	Carr → C C → B	C → Nm C→B	C C→B	N C → B	N B → C	C B → C	TOTAL SUJETS
Mat_1	10_a	15_b	11_c	10_d	15_b	10_e + 15_f	-	10_a	15_b	11_c	10_d	10_f	15_f	71
Mat_2	10a	15b	12c	10d	15b	10e + 15f	10	10a	15b	12c	10d	10e	15f	82
CP		14b	12c	10d	14b	10e + 15f + 11f	10	-	14b	12c	10d	10e	15f + 11f	77
CE1	-	15b	12c	10d	15b	10e + 15f	10	-	15b	12c	10d	10e	15f	72
CE2	-	-	11c	10d		10e + 15f	-	-		11c	10d	10e	15f	46
Σ	20a	59b	58c	50d	59b	50e + 70f + 11f	30	20a	59b	58c	50d	50e	86f + 11f	342 + 11

TABLEAU I

NOMBRE DE SUJETS DANS CHAQUE EPREUVE

	Carrefour 1	Carrefour 2	0° C	0° N	0° C Nm	0° N (B	0° C C)	45° N	180° (Carr 1) C C	180° (Carr 2) C Nm	180° C	180° N	180° N B C	180° C B C
Mat_1	160	240	176	160	240	160	240	-	160	240	176	160	160	240
Mat_2	160	240	192	160	240	160	240	160	160	240	192	160	160	240
CP	-	224	192	160	224	160	406	160	-	224	192	160	160	426
CE1	-	240	192	160	240	160	240	160	-	240	192	160	160	240
CE2		-	176	160	-	160	240	-	-	-	176	160	160	240

<u>TABLEAU II</u>

NOMBRE DE REPONSES POUR CHAQUE GROUPE

2. Comparaison globale des réussites

Les tableaux sources donnés en annexe de cette partie, présentent la répartition :

- d'une part des réponses correctes selon les différents groupes d'âge (et de niveau scolaire) et les différentes situations (Tableau

- d'autre part des sujets qui réussissent pour chacune des situations (sujets classés "R"). (Tableau Source 2)

Ces résultats différents, bien que non indépendants, donnent de premiers éléments sur l'évolution de la qualité des réponses des élèves (en terme de réussite ou d'erreur) et sur les différences entre les situations (1).

2. 1. Evolution des réponses

Les figures 4a et 4b d'une part, 5a et 5b d'autre part, donnent - sous forme de courbes, pour la lisibilité d'ensemble - la répartition des réponses correctes (a) et des sujets qui réussissent (b) selon les différentes situations et selon la disposition relative des quadrillages : les figures 4 concernent les repérages "déspatialisés", côte à côte (0°) et biais (45°), les figures 5 concernent les repérages en "face à face" (180°). (p. 25-28).

En ce qui concerne les réponses correctes, on observe globalement une amélioration avec l'âge (le niveau scolaire), avec une exception : le repérage couleur, en face à face, avec une présentation des positions du bord

---

(1) La situation "déspatialisée", passée par deux groupes différents (Carr 1 et Carr 2) de maternelle y donne pour chaque âge les mêmes résultats confirmant notre hypothèse sur la représentation des sujets. Nous avons regroupé ces résultats dans les analyses qui suivront.

vers le centre montre une diminution des réponses correctes du CP au CE2.

En ce qui concerne les courbes représentant l'évolution du pourcentage de sujets qui réussissent, elles présentent la même évolution d'ensemble. Le cas particulier (C, 180°, B ⟶C) y apparaît plus nettement encore.

Le premier résultat - attendu - est donc une amélioration de la qualité des réponses aussi bien des groupes d'âges pris collectivement que des sujets. Le second est que cette amélioration est inégale selon les différentes situations. Elle est, de plus, marquée différemment selon le mode d'analyse des résultats que l'on utilise.

Pour le repérage "déspatialisé", avec identification des carrefours comme couples (1) de couleurs, la réussite est acquise dès la fin de maternelle.

Dans le repérage côte à côte, dès le CP la réussite est massive (90 % de réponses correctes, et le même ordre de réussite) pour les diverses situations.

Les étapes de l'évolution lorsqu'il n'y a pas de changement de point de vue entre le quadrillage du sujet et celui de l'expérimentateur apparaissent les suivantes :

- dès 4;6 ans des enfants réussissent assez bien à identifier des carrefours (60 % de réponses correctes, 40 % de sujets réussissant), ils repèrent assez bien certaines positions (40 à 55 % de réponses correctes) mais pas n'importe lesquelles : moins de 10 % d'entre eux réussissent le repérage (avec ou sans éléments intrinsèques).

---

(1) ou paires : on ne peut distinguer ici.

- à 5;6 ans ils identifient sans difficulté les carrefours ; de 20 à 40 % des sujets réussissent un repérage correct sur l'ensemble des positions, cependant de globalement 65 à 75 % des réponses sont correctes ;

- à 6;6 ans (CP), le repérage direct est sans problème (pour les quadrillages simples utilisés : 6 valeurs des coordonnées).

On peut repérer déjà deux périodes d'évolution qualitative (au vu de l'ampleur des différences) :

- de 4;5 à 5;6 ans, acquisition de l'utilisation coordonnée de 2 informations (engagée au préalable, mais limitée à 4;6 ans à une (large) minorité d'enfants) dans un domaine de dimension maîtrisé : la couleur; les coordinations spatiales sont en cours d'évolution ;

- de 5;6 à 6;6 ans les coordinations spatiales sont acquises (avec un domaine de validité limité - ne serait-ce que par les capacités des enfants dans le domaine numérique : l'expérience, précisons-le, a lieu dans le 1er trimestre scolaire), lorsqu'il n'y a aucun changement de point de vue (autre qu'une translation compensable par un mouvement de translation du corps propre).

Lorsqu'un changement de point de vue est nécessaire, et qu'il peut être compensé par un mouvement du corps propre avec rotation limitée (45°) on constate un décalage d'un an dans l'évolution : échec massif en fin de maternelle (pour la réussite d'ensemble), amélioration "quantitative" de maternelle en CP (40 % de sujets réussissent), réussite affirmée enfin en CE1.

L'analyse des réponses erronées avec l'étude des invariants spatiaux utilisés par les enfants nous permettra d'affiner ces premiers résultats.

En ce qui concerne les situations de face à face comportant un changement de point de vue non compensable par le sujet (qui n'a pas la lattitude de se déplacer) l'analyse de l'évolution apparaît nettement plus complexe : les faibles réussites des enfants de CE2 contrastent avec les acquis de CP sur le repérage direct. La prise en compte du changement de point de vue s'améliore globalement (évolution des réponses correctes) mais sa stabilité reste faible : l'analyse des transformations spatiales utilisées pour compenser le changement de point de vue confirmera d'ailleurs ce problème de stabilité.

2.2. Comparaison des situations

Etant donnée la structure incomplète du plan d'expérience nous effectuons des comparaisons distinctes sur deux grands niveaux :

A : enfants de maternelle (4 à 6 ans)

B : enfants de CP et CE1 (6 à 8 ans).

La première comparaison (sur le niveau A) porte sur le repérage "déspatialisé", le repérage sans changement de point de vue (côte à côte, et le repérage face à face, pour toutes les situations.

La seconde comparaison (sur le niveau B) porte sur toutes les situations, à l'exception du repérage couleur, face à face, suivant l'identification des carrefours, situation réussie à 90 % à la fin de maternelle.

Pour le niveau A, nous pouvons comparer les situations soit en fonction du pourcentage de réponses correctes OR, soit en fonction du pourcentage de sujets qui réussissent OS.

Pour la commodité de lecture des résultats nous avons ordonné séparément les situations sans changement de point de vue et les autres.

Les ordres obtenus OR et OS sont respectivement les suivants, par ordre décroissant des résultats positifs (en pourcentage).

Tableau III

OR :	côte à côte					face à face					
Carr 1 et 2	C_b	C_c	N_c	N_m	N_b	Carr C	C_b	C_c	N_c	N_m	N_b
80	68	64	61	57	55	61	42	27	18	16	7
OS :	**côte à côte**					**face à face**					
Carr 1 et 2	C_b	C_c	N_m	N_c	N_b	Carr c	C_b	N_m	C_c	N_c	N_b
66	23	16	16	15	0	30	20	7	4	0	0

Etant donnés les effectifs (de 20 à 30) sur lesquels sont calculés les pourcentages de sujets, on peut considérer que les deux ordres ainsi obtenus sont équivalents ; de plus l'identification des carrefours est nettement plus facile que le repérage.

Lorsqu'il n'y a pas de changement de point de vue les différences entre repérage intrinsèque (C) et spatial (N) sont minimes ; cependant les deux situations C_b et N_b sont nettement ordonnées : la couleur pourrait servir dans le contrôle des réponses spatiales produites. De plus, le repérage dans le quadrillage noir marqué après l'identification des carrefours, a les mêmes caractères que sur le quadrillage noir directement présenté.

Le repérage en face à face sur le quadrillage couleur, lorsqu'il suit l'identification des carrefours conduit, en moyenne, à une difficulté analogue avec le repérage direct. Toutefois, cette situation moyenne cache des différences sensibles entre les deux classes de maternelles : les "petits" bénéficient peu de l'identification préalable des carrefours alors que les "grands" identifient les couples de couleurs dans le repérage qui suit la situation "carrefour".

Le repérage sur le quadrillage couleur, dans l'un des ordres de présentation a des caractères analogues, que ne présente pas l'autre situation avec le quadrillage couleur : si un même processus d'identification des couleurs a eu lieu pour une partie des enfants, il ne nous a pas été possible à partir de nos seuls résultats d'en donner une interprétation, sinon peut-être le fait qu'une réponse initiale en "miroir" pouvait conduire les enfants à remarquer la différence des carrefours du pion de l'expérimentateur et du leur, étant donnés qu'alors les carrefours étaient très proches, cela aurait conduit les enfants à se déterminer sur les couples de couleurs.

Les autres situations de repérage en face à face apparaissent beaucoup plus difficiles.

Les comparaisons analogues effectuées au niveau B intègrent la situation de repérage en biais ; elles fournissent les ordres suivants :

Tableau IV

OR	Côte à côte					Biais	Face à face				
Carr	N_b	C_c	N_c	N_m	C_b	N	C_b	C_c	N_m	N_b	N_c
99	98	97	96	94	92	81	60	51	34	34	33
OS	Côte à côte					Biais	Face à face				
Carr	N_c	C_c	N_m	N_b	C_b	N	C_b	C_c	N_m	N_b	N_c
100	100	96	95	95	91	60	25	25	21	0	0

Ces ordres ne diffèrent pas significativement. L'identification des carrefours et le repérage direct sont équivalents, et complètement réussis. Le repérage biais est plus difficile mais reste proche du repérage côte à côte, le repérage en face à face beaucoup plus mal réussi, et les situations se différencient :

- le quadrillage couleur et celui noir marqué permettent à un certain nombre d'enfants d'utiliser le repérage intrinsèque, alors que le repérage purement spatial avec le quadrillage noir ne conduit à aucune réussite : le changement de point de vue semble impossible à compenser de façon stable autrement que localement, pour certaines positions. On retrouve une même hiérarchie que pour le niveau A à l'intérieur des situations en face à face. Le changement de point de vue présente une difficulté très spécifique, indépendante semble-t-il du problème de la composition des repérages dimensionnels, introduisant une restriction qualitative du domaine de validité des opérations de repérage plan.

L'analyse de la façon dont les différents invariants spatiaux sont pris en compte par les enfants, et celle des transformations spatiales qu'ils introduisent pour compenser les changements de points de vue apportera des éléments complémentaires quant à l'évolution des repérages.

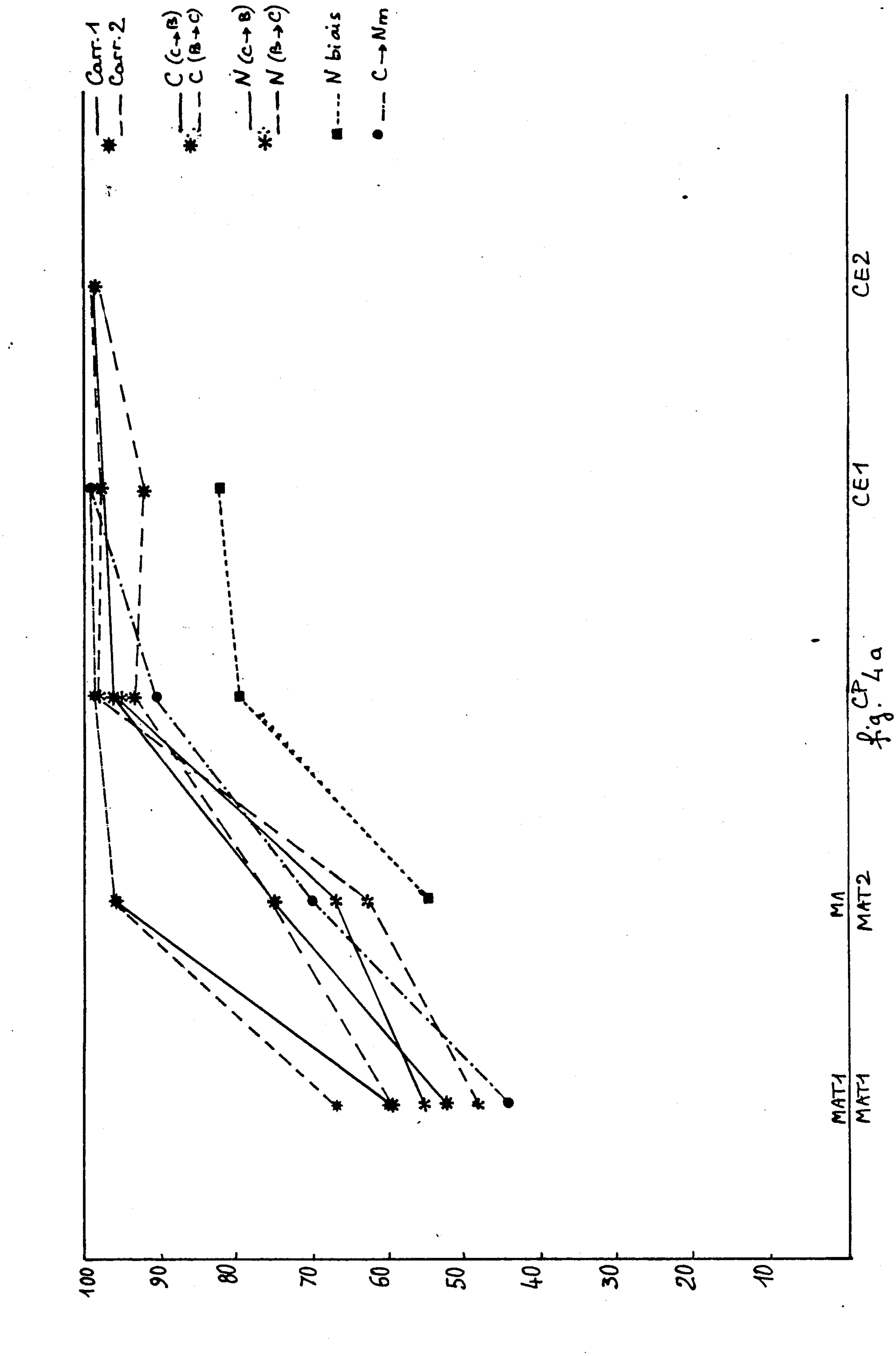

Carr. 1
Carr. 2
C (C→B)
C (B→C)
N (C→B)
N (B→C)
N biais
C → Nm
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
MAT1
MAT1
M1
MAT2
CP
CE1
CE2

fig. 4a

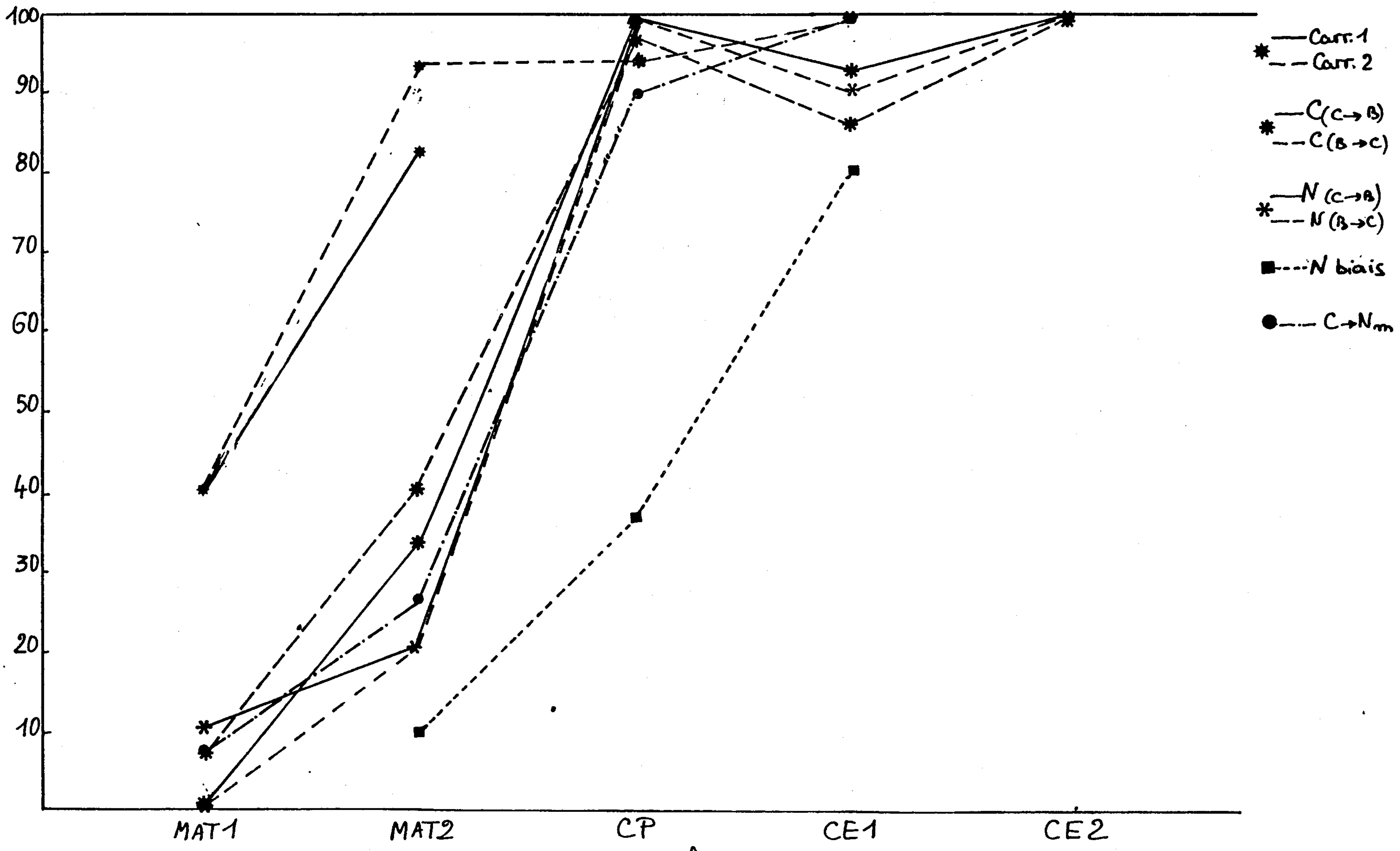

100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
MAT1
MAT2
CP
CE1
CE2
Carr. 1
Carr. 2
C (C→B)
C (B→C)
N (C→B)
N (B→C)
N biais
C→Nm

fig. 4b

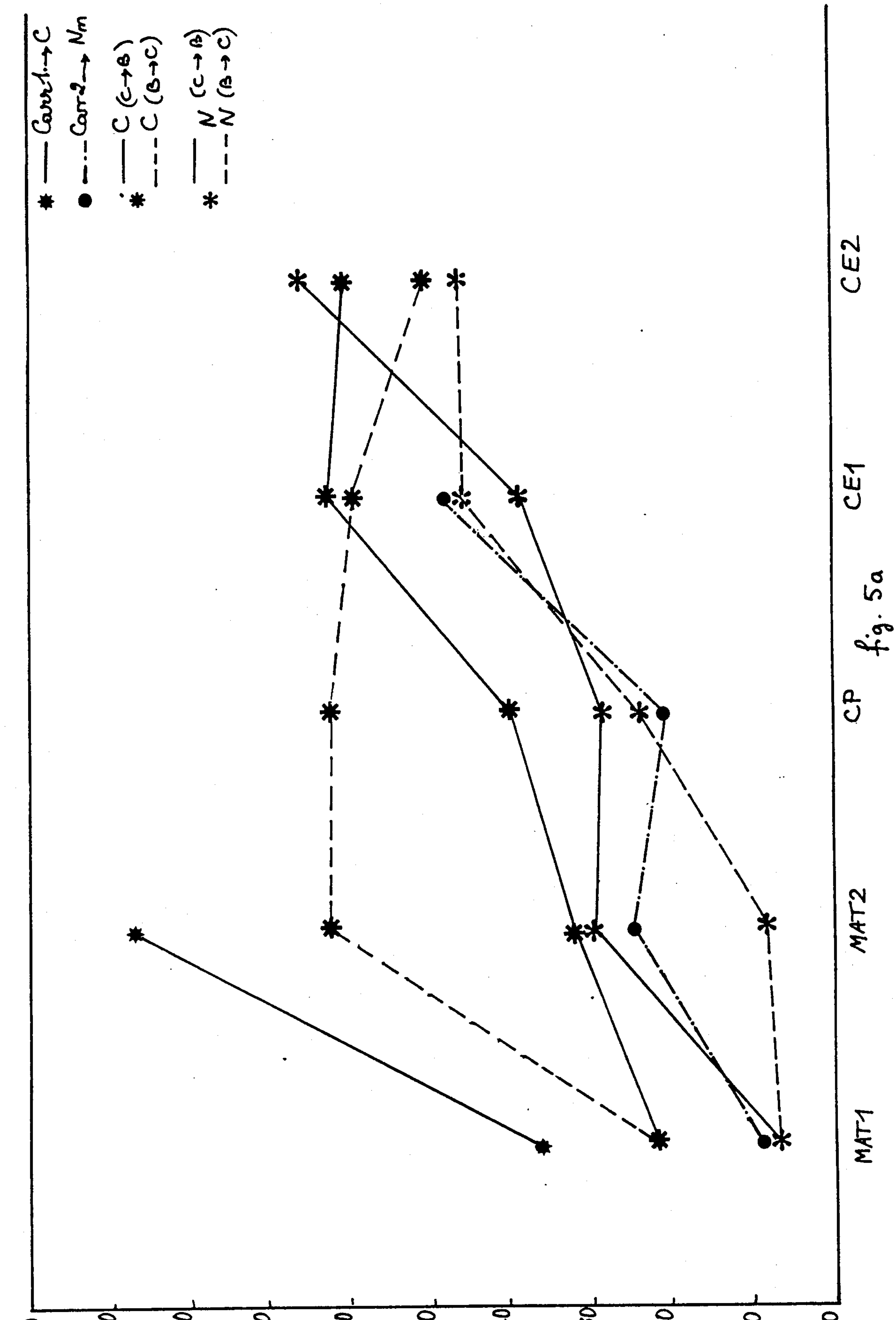

Carr 1 → C
Carr 2 → Nm
C (C→B)
C (B→C)
N (C→B)
N (B→C)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
MAT1
MAT2
CP
CE1
CE2

fig. 5a

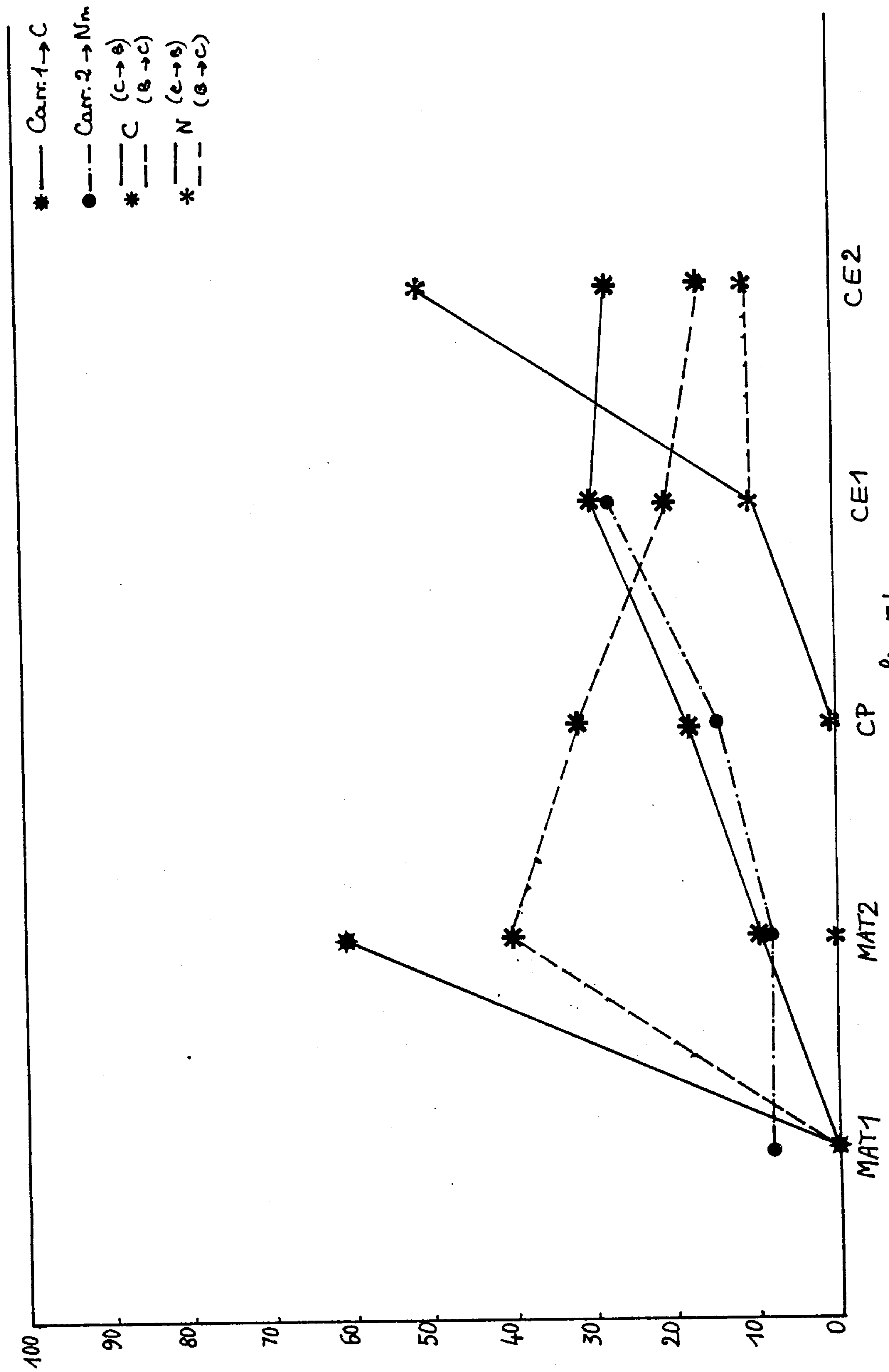

Car. 1 → C
Car. 2 → Nm
C (C → B)
(B → C)
N (C → B)
(B → C)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
MAT1
MAT2
CP
CE1
CE2

fig. 5b

3. Invariants spatiaux : topologiques, affines et métriques conservés dans les réponses.

Nous avons classé les points du quadrillage selon qu'ils sont sur la frontière du quadrillage (2 horizontales et 2 verticales) ou à l'intérieur.

Remarquons que la notion de frontière que nous utilisons est très forte puisqu'elle porte sur l'ensemble des carrefours et non sur la partie de plan constituée par le support matériel du quadrillage.

Il s'agit donc déjà de propriétés relatives qui doivent être abstraites de la situation puisque les points de la frontière - pour le quadrillage - sont en fait des points intérieurs sur chacune des lignes coordonnées. Les invariants en jeu ne sont donc pas les invariants topologiques primaires mais des invariants plus élaborés, fondés sur la prise en compte d'un ensemble particulier des points : celui des carrefours, ensemble discontinu, inscrit dans la structure complexe du quadrillage matériel.

Rappelons par ailleurs que les points S et B de la frontière se différencient sur le plan affine puisque les sommets S sont les points anguleux de la frontière.

Nous définissons comme des erreurs affines une réponse "sommet" donnée pour un autre point du bord, et réciproquement le respect des invariants topologiques se traduit par des réponses S ou B pour des positions données sur la frontière, et par des réponses M ou C pour des positions données à l'intérieur du quadrillage.

Quant aux relations qualifiées de métriques, ce sont celles de plus ou moins grand éloignement sur l'"axe" centre/bord ; elles différencient les points C du centre et les autres points, dits médians M, de l'intérieur du quadrillage.

3.1. Analyse des erreurs topologiques

Pour permettre une comparaison plus immédiate, le tableau suivant, tableau V, donne le nombre d'erreurs topologiques calculé sur la base de 160 réponses (10 sujets x 16 positions) (nombre minimal de réponses pour chaque groupe).

Il n'y a pas de différence significative due à l'ordre de présentation des positions, nous présentons toutes les données obtenues avec l'ordre du centre vers le nord.

	0°		45°	180°		% moyen
	C	N	N	C	N	d'erreurs
Mat_1	11	14	-	11	13	7,5
Mat_2	7	6	7	7	5	4
CP	1	-	1	3	1	0,8
CE1	-	-	-	1	2	0,4
CE2	-	-	-	1	-	-
% moy.	2,4	2,5		2,9	2,6	

TABLEAU V

A 4 ans déjà les erreurs topologiques sont en dessous de 10 % des réponses, à partir du CP elles deviennent négligeables ; les différentes situations sont très proches de ce point de vue, qu'il s'agisse, nous l'avons dit de l'ordre de présentation des positions, de la nature du quadrillage ou de la disposition respective des quadrillages QS et QE.

Les invariants topologiques sont donc globalement massivement respectés lors des tâches de repérage spatial, celà dès 4 ans.

Il nous faut néanmoins nuancer cette conclusion par l'analyse des réponses des sujets : combien font des "sans-faute" du point de vue topologique.

L'ordre de présentation ne donne pas de différences sur ce critère non plus ; nous donnons donc dans un tableau analogue au précédent donnant le pourcentage de sujets qui ne font aucune erreur topologique. (Tableau VI).

	0° C	0° N	45° N	180° C	180° N	% moyen
Mat_1	23	38	x	35	40	34
Mat_2	63	80	40	63	60	59
CP	94	100	90	83	90	91
CE1	100	100	90	89	80	94
CE2	100	100	x	96	100	99

TABLEAU VI

Le respect global des invariants topologiques ne se traduit pas par la même fiabilité des sujets individuels : chez les petits de maternelle (Mat_1) la probabilité de faire au moins une erreur topologique n'est pas négligeable, les grands (Mat_2) maîtrisent relativement bien l'invariance topologique sauf dans la disposition relative en biais des deux quadrillages, qui transforme le couple "horizontale/verticale" de QS en un couple d'obliques sur QE : la perturbation ainsi introduite fait régresser des invariants topologiques. (Ceci est à opposer à l'utilisation des invariants topologiques avec la même fiabilité dans le repérage face à face et le repérage côte à côte).

3.2. Répartition des erreurs topologiques et affines selon les catégories de points.

Le tableau VII donne le pourcentage des erreurs sur les quatre situations de repérage côte à côte.

	S	B	M	C
Erreurs topologiques	0,26 %	2,7 %	3,4 %	1
Topologiques + affines	2,1 %	4 %	3,4 %	1

TABLEAU VII

La "distance" au bord est prise en compte, puisque les points du centre (C) donnent lieu à moins d'erreurs que les autres points intérieurs (M) ; il en est de même des caractéristiques affines des sommets, pour lesquels il y a moins d'erreurs topologiques que pour les autres points du bord (B).

3.3. Analyse de l'ensemble des réponses selon la catégorie des positions (situations sans changement de point de vue).

Etant donnée la quasi-disparition des erreurs après 6 ans, dans la disposition côte à côte, cette analyse porte sur les groupes de 4;6 ans et 5;6 ans. L'ordre de présentation et la nature du quadrillage n'introduisent pas de différences significatives à ce niveau d'analyse (voir tableau en annexe) ; nous regroupons dans les résultats des 4 groupes de 4;6 ans et ceux des 4 groupes de 5;6 ans. Pour chaque catégorie de positions les données portent donc sur au moins 160 réponses.

Le tableau VIII donne la distribution, en pourcentage, des différentes réponses. (Lorsque la réponse en miroir ou une erreur de 1 sur l'horizontale peuvent donner la même réponse, nous le précisons par la détermination de la classe de réponses notée Sv ≡ h+).

	4;6 ans						5;6 ans					
	+	Sv	Sv≡h+	h+	Sh v+	x	+	Sv	Sv≡h+	h+	v+	x
S	74,4	20,6	-	2,5	-	2,5	96,3	2,5	-	1,2	-	-
B	49,4	15	5	22,5	6,2	1,9	65,1	6,2	10,6	8,1	8,1	1,9
M	33,8	8,8	11,2	28,79	13,1	4,4	52,5	1,9	6,9	14,3	18,8	5,6
C	57,5	-	15,7	16,2	5	5,6	61,9	-	13,7	9,3	8,2	6,9

TABLEAU VIII

L'ordre de difficulté des diverses catégories de positions (S, B, M,C) traduit par la fréquence de l'ensemble des erreurs, est le même que celui obtenu pour les erreurs topologiques : les caractéristiques des sommets et centre se traduisent par de meilleures réponses que pour les bords et les points médians. Les différents caractères spatiaux généraux semblent donc être pris en compte comme des éléments importants dans la constitution du repérage sur un quadrillage bidimensionnel.

Nous retrouvons des résultats voisins en ce qui concerne les erreurs dans la disposition noir, biais, et noir face à face ; les différences entre bords, médians et centre y sont cependant très faibles.

3.4. Homogénéité des réponses

Comme nous l'avons fait avec les réponses correctes des sujets, nous complétons ces résultats globaux par l'analyse de la cohérence des sujets dans leurs réponses pour les différentes catégories de positions. Le tableau IX donne le pourcentage de sujets r et i qui font respectivement 0 erreur et 1 erreur sur l'ensemble des 4 situations de repérage sans changement de point de vue (élèves de maternelle) ; le nombre donné entre parenthèses est le pourcentage des sujets donnant des réponses absolument ou presque correctes, c'est-à-dire (r + i).

	4;6 ans			5;6 ans		
	R		I	R		I
S	37,5	(70)	32,5	87,5	(97,5)	10
B	7,5	(40)	32,5	32,5	(50)	17,5
M	2,5	(20)	17,5	17,5	(35)	17,5
C	7,5	(47,5)	40	40	(62,5)	22,5

TABLEAU IX

Les résultats vont dans le même sens que ceux de l'ensemble global des réponses, et accentuent le statut particulier des sommets ; l'importance particulière de la cohérence des réponses pour les points du centre à 5;6 ans nous paraît due en partie au fait que les réponses successives à ces 4 points ne sont pas indépendantes : une première réponse correcte "assure" pratiquement les suivantes.

Nous pouvons remarquer que l'évolution de 4;6 à 5;6 ans concerne toutes les catégories de points mais de façon différenciée :

- la fiabilité complète des réponses croît pour tous les points (sujets r) mais plus nettement pour les points les plus spécifiques : sommets d'abord, centre ensuite, puis bords et enfin médians ;

- les sujets de 5;6 ans repèrent correctement tous les sommets, le repérage des points médians reste difficile (à peine plus du tiers) de sujets font 1 erreur ou moins sur cette catégorie de points pour lesquels il est nécessaire de coordonner effectivement des repérages sur deux directions, les caractères spatiaux généraux ne permettant pas de les identifier.

On observe une évolution importante de 4;6 à 5;6 ans de la maîtrise des notions liées à des caractères topologiques "généraux" du plan ; en particulier si l'on considère les réponses complètement correctes (R) on observe que l'orientation dans les directions privilégiées haut/bas et gauche/droite paraît assurée pour les enfants de 5;6 ans pour les sommets du quadrillage (près de 90 % de réponses correctes). Cela n'implique toutefois pas ipso-facto que les positions par rapport à ces deux directions soient coordonnées, comme l'indique le taux assez faible des réponses correctes (R + I) pour les points du bord.

4. Invariants dimensionnels

L'analyse de l'évolution des réponses correctes et celle du pourcentage des sujets qui réussissent a montré que dès 4 ans les enfants étaient capables de donner un nombre important de réponses correctes dans une situation de repérage sans changement de point de vue.

Nous avons vu aussi que lorsque les changements de point de vue conservaient les directions verticale et horizontale les invariants topologiques et affines étaient respectés dans les réponses des enfants.

La prise en compte de caractéristiques spatiales générales apparaît donc précoce et contribue au repérage correct de certaines catégories de positions.

Or l'espace plan est, de plus, un espace "bidimensionnel" : le repérage sur un quadrillage fini fournit une réalisation (discrétisée) de ce caractère bidimensionnel. Dans quelle mesure les enfants prennent-ils en compte cette dimensionnalité de cette structuration : lorsqu'il y a "erreur" de position l'une des dimensions est-elle conservée ? Par exemple, si le pion est placé sur la 3ème horizontale de QE en partant de l'expérimentateur, est-il placé par l'enfant sur la 3ème horizontale de son propre quadrillage ?

L'une et l'autre des deux directions sont-elles traitées symétriquement ? Nous pouvons faire déjà l'hypothèse que les acquisitions plus précoces des relations sur l'axe "proximal/distal" (plus près - moins près du sujet, devant/derrière un objet par rapport au sujet) se traduiront par une conservation de l'horizontale, précisant celle de la verticale.

Dans le cas du repérage "déspatialisé", lors de l'identification des carrefours, les sujets respectent-ils la symétrie des informations, sachant que l'identification se traduit par la détermination d'une position sur le quadrillage du sujet ? La réponse à cette question peut nous apporter des informations sur l'organisation de la réponse de repérage.

Les tableaux X, XI et XII donnés en annexe présentent le pourcentage des réponses qui respectent la seule horizontale (h+), la seule verticale (v+) ou aucune des situations (∅). Nous avons classé en (h+) toutes les réponses conservant l'horizontale, y compris les échanges gauche/droite et en (v+) toutes les réponses conservant la verticale, y compris les échanges haut/bas. En revanche, les transformations notées Svh qui échangent à la fois droite/gauche et haut/bas ont été considérées comme respectant les deux dimensions, en ce sens qu'il s'agit de transformtions bidimensionnelles. (L'analyse plus précise des transformations utilisées localement ou globalement dans les réponses est l'objet de la partie suivante).

Les figures 6 et 7 représentent respectivement l'évolution des réponses (h+), (v+) et (∅) d'une part pour les situations "déspatialisées" (Carr), sans changement de point de vue (N, C, Nm) avec changement de point de vue compensable (biais) (Fig. 6) et d'autre part pour les situations avec changement de point de vue non compensable (face à face). Les différences entre les situations de repérage sans changement de point de vue sont faibles, nous avons regroupé dans les figures les résultats de 2 repérages "intrinsèques" (C) et des 2 repérages spatiaux (N) puisqu'il s'agit d'une de nos variables d'étude. (p. 43-44).

4. 1. Réponses "unidimensionnelles"

Nous considérons les réponses qui respectent une dimension seulement comme "unidimensionnelle", les réponses correctes (ou de type Shv en situation de repérage face à face) sont bidimensionnelles.

A partir de 5;6 ans, plus de 85 % des réponses sont au moins unidimensionnelles, quelle que soit la situation de repérage : cette proportion est bien supérieure à ce que l'on pourrait attendre d'un respect des seules relations spatiales "générales" topologiques, affines ou métriques (1).

(1) Par exemple une réponse qui respecte le fait d'être un point "médian" - propriété métrique - à une probabilité de 9/12 d'être unidimensionnelle.

Si l'on considère les situations de repérage sans changement de point de vue - où les directions horizontale et verticale sont les mêmes pour le sujet et l'expérimentateur - plus de 95 % des réponses conservent au moins une dimension, et ce dès 4;6 ans.

Il y a donc bien, pour tous les enfants observés, une prise en compte de l'organisation de l'espace des carrefours par le quadrillage. Cette prise en compte est encore très partielle pour beaucoup d'enfants de 4;6 ans (de 40 à 50 % de leurs réponses respectent une seule dimension) et pour un nombre non négligeable des enfants de 5;6 ans (20 à 30 % de réponses unidimensionnelles).

Pour le repérage "déspatialisé", la prise en compte des dimensions "couleurs" (qui se confondent sur le quadrillage avec les dimensions "horizontale" et"verticale") est meilleure : les réponses unidimensionnelles concernent 35 % pour les"petits" de Mat_1 (4;6 ans) et à peine 8 % des "grands" de Mat_2 (5;6 ans).

Le repérage "biais" présenté à partir de 5;6 ans produit des réponses voisines (en ce qui concerne la dimensionalité) de celle du repérage côte à côte que nous venons de présenter ; cependant il existe des échanges entre la direction horizontale et verticale (par compensation erronée du changement de point de vue : rotation de 45° dans le "mauvais" sens) qui se traduisent évidemment par un nombre plus important d'erreurs sur les deux dimensions.

4. 2. Statut des directions "horizontale" et "verticale"

Sur l'ensemble des courbes concernant le premier groupe de situations (Fig. 6), on observe le même phénomène : les horizontales sont mieux conservées que les verticales, en particulier au niveau de Mat_1 (4;6 ans) où les réponses unidimensionnelles sont nombreuses.

Le tableau XIII permet de comparer globalement les situations "déspatialisées" (Carr 1 et 2), sans changement de point de vue (C, N, Nm : 5 situations) à 4;6 et 5;6 ans (1) en donnant les pourcentages moyens de réponses exclusivement unidimensionnelles (h+) et (v+) : (on ne compte donc pas de réponses correctes, bidimensionnelles, beaucoup plus nombreuses à 5;6 ans).

	(Mat 1) 4;6 ans			(Mat 2) 5;6 ans		
	Carr	côte à côte	biais	Carr	côte à côte	biais
h+	20,5	37	-	6,5	19,5	20
v+	8,5	6,5	-	1,5	7	10

TABLEAU XIII

Ces résultats globaux confirment l'hypothèse faite sur le privilège de la direction de l'axe "proximal/distal" du sujet par rapport à la direction orthogonale de l'axe gauche/droite.

Une part de ce privilège pourrait certes être rapportée à ce que nous savons sur les modes d'exploration visuelle des jeunes enfants à savoir la dominance de l'exploration horizontale ; cependant deux faits nous paraissent relativiser le rôle de l'exploration sensorielle, et mettre plutôt en avant des éléments tenant à la constitution de la représentation de l'espace et des relations spatiales :

- d'une part les conservations unidimensionnelles pour le repérage "biais" sont du même ordre que celles du repérage côte à côte, or l'exploration

(1) et celle de "biais" pour les seuls 5;6 ans.

visuelle nécessite dans cette situation une autre organisation qu'un balayage oculaire horizontal ;

- d'autre part, l'identification des carrefours montre à 4;6 ans les mêmes caractéristiques d'asymétrie des directions conservées que dans le repérage spatial : or les carrefours sont "déspatialisés" et l'exploration visuelle ne peut être la même qu'avec des quadrillages côte à côte.

De plus, pour cette situation d'identification, les carrefours ne peuvent être considérés comme "près" ou "loin" de l'expérimentateur (ou du sujet) : ils sont présentés sur la table, l'un après l'autre, posés au même endroit devant l'expérimentateur (hors de tout repère propre) puis mis hors de vue. Ce n'est donc pas une simple règle d'action "près de l'expérimentateur/près de moi" qui peut produire les réponses conservant prioritairement les horizontales (pas plus que le prolongement "visuel" desdites horizontales, nous l'avons vu plus haut).

Nous pensons qu'il s'agit bien d'effets au niveau des actions du sujet de représentations organisant l'espace, avec un premier élément dimensionnel de façon dominante : l'enfant rechercherait alors par un balayage des lignes horizontales successives quel est le carrefour de son quadrillage dont la couleur "horizontale" coïncide avec l'une de celles du carrefour. (Si la prise en compte de l'autre couleur a lieu, alors la réponse est correcte).

Les résultats pour les situations de repérage face à face apparaissent beaucoup plus complexes : la variabilité des différentes situations est considérable.

A l'exception de la situation "couleur, avec présentation des positions du bord vers le centre", atypique pour cette analyse comme pour les résultats en terme de réussite/échec.

On retrouve à tous les âges, pour toutes les situations l'asymétrie dans la conservation des dimensions "horizontale" et "verticale". Le tableau XIV donne les résultats d'ensemble pour les trois groupes de situations de repérage face à face : repérage sur les quadrillages couleur après identification des carrefours (Carr C), repérage avec pour QS un quadrillage noir marqué après identification des carrefours et repérage en côte à côte (Carr Nm), repérage face à face après repérage côte à côte (C_b, C_c, N_b, N_c).

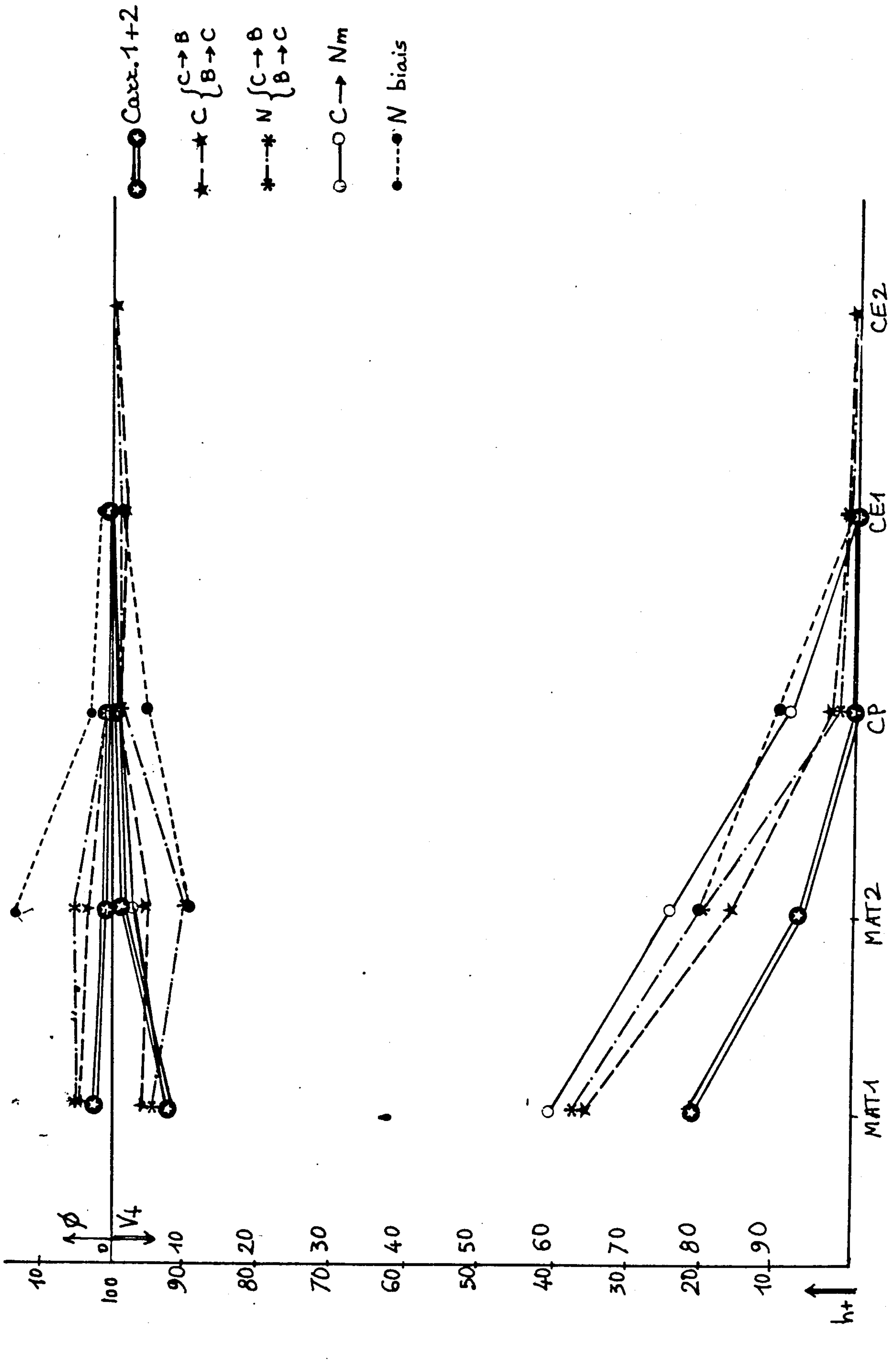
Tableau XIV

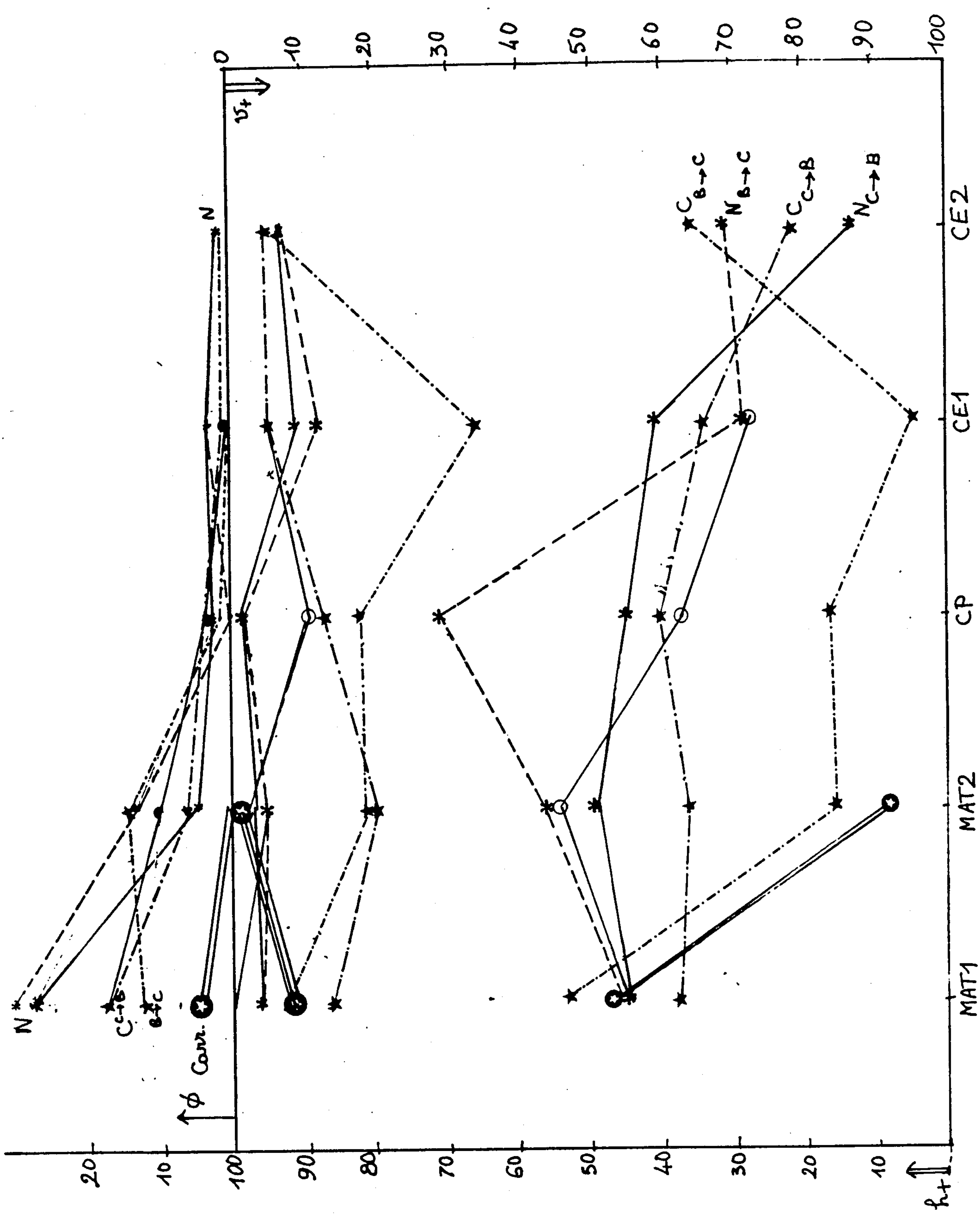
	Mat 1			Mat 2		
	Carr C	Carr Nm	face à face (N, C)	Carr C	Carr Nm	face à face (N, C)
∅	4	17	20	-	10	9
v+	8	9	6,5 (6)	2	3	12,5 (10)
h+	46	44	44 (42)	9	53	37 (46)

(Entre parenthèses, les résultats obtenus en éliminant la situation C_b).

L'asymétrie entre horizontale et verticale est bien plus forte que dans les situations sans changement de point de vue, ou avec un changement immédiatement compensable par le sujet : dans ces situations de repérage en face à face il intervient donc bien autre chose qu'une analyse dimensionnelle sur les quadrillages-repères : l'analyse des transformations effectuées par les enfants pour compenser le changement de point de vue entre leur quadrillage et celui de l'expérimentateur est donc nécessaire pour préciser ici le statut des invariants dimensionnels.

On peut néanmoins déjà voir dans l'asymétrie un effet massif de la structuration de l'espace par l'axe proximal/distal, dimension fortement conservée par les enfants dès 4 ans lors du changement de point de vue (plus de 50 % des réponses conservent au moins h). Cet axe serait celui par rapport auquel les enfants commenceraient le repérage dans leur quadrillage, si l'on en juge par l'effet constaté dans la situation des "carrefours" elle-même (où, nous l'avons dit plus haut, le balayage oculaire horizontal ne peut produire cet effet).


Carr. 1+2
C {C→B, B→C}
N {C→B, B→C}
C → Nm
N biais
MAT1
MAT2
CP
CE1
CE2
h+
Ø
V4


0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
v+
MAT1
MAT2
CP
CE1
CE2
h+
Φ Corr.
N
C C→B
B→C
N
C B→C
N B→C
C C→B
N C→B

5. Les invariants d'orientation

Dans l'analyse des invariants dimensionnels conservés dans les réponses des sujets, nous avons classé comme invariance de l'horizontale (h+) toutes les réponses qui respectaient l'orientation de l'axe proximal/distal de l'espace (celle de direction "verticale"), et comme invariance de la verticale les réponses qui respectaient l'orientation gauche/droite.

Nous avons vu qu'à partir de 6 ans, lorsqu'il n'y avait que des changements de point de vue directement compensables par le sujet, les deux invariants étaient respectés, alors que de 4 à 6 ans l'orientation de l'axe vertical était nettement mieux respectée. Dans la situation de repérage en face à face, une même tendance se manifestait dans pratiquement toutes les situations, en ce qui concerne l'asymétrie des invariants.

Nous allons donc, dans un premier temps, analyser les erreurs sur l'axe "gauche/droite" dans les diverses situations, et en particulier les erreurs spécifiques d'échange de la gauche et la droite (inversion de l'orientation).

5. 1. La symétrie en miroir

Il y a une transformation qui inverse l'orientation en respectant tous les autres invariants : c'est la symétrie "en miroir" notée ici Sv. Cette symétrie a été étudiée dans les recherches sur le repérage, et apparaît comme une transformation relativement fréquente, toutefois les dispositifs expérimentaux pouvaient contribuer à cette fréquence.

Le tableau XV donne le pourcentage de réponses Sv dans les différentes situations. Nous y avons indiqué par un * les cas où un seul sujet "homogène" gène dans ses erreurs apportait une contribution particulière à ce pourcentage. La situation "biais" comporte des échanges horizontale/verticale, spécifiques à cette disposition des quadrillages qui rendent difficiles une comparaison directe avec les autres situations - elle se rapproche fortement des situations de repérage en côte à côte (0°).

Tableau XV

	0°					180°					
	C_c	Nm_C	N_c	N_b	C_b	$Carr_C$	C_c	Nm_c	N_c	N_b	C_b
Mat_1	19	23	21	16	15	39	34	39	39	42	45
Mat_2	11	12	10	16*	6	9	32	50	40	46	13
CP	3	5	2	-	2		38	29	41	68	15
CE1	2	-	-	1	3		30	29	36	28	3
CE2	1		-	1	-		20		11	33	32

* 1 sujet "homogène" avec plus de 9 réponses Sv.

Ce tableau montre tout d'abord une différence considérable selon les dispositions des deux quadrillages : lorsque le sujet peut directement compenser par son propre déplacement le changement de point de vue de son quadrillage à celui de l'expérimentateur les inversions en miroir ne sont pas fréquentes;lorsque cette compensation n'est pas possible les inversions "en miroir" prennent une importance considérable.

Il faut remarquer qu'une "inversion "en miroir" est ici une réponse qui a la propriété d'associer la position du pion du sujet au symétrique de la position du pion de l'expérimentateur.

Or une telle réponse peut être produite :

- par une inversion gauche/droite dans la représentation que se fait le sujet de "la même place", avec une bonne identification sur l'horizontale : ceci suppose un repérage bidimensionnel (pour la position en question), ou le respect d'invariants topologiques ou affines complétant l'invariance de la place de l'horizontale ;

- par une prise en compte correcte de l'orientation mais avec une erreur dans la détermination exacte de la verticale (Sv = h+) ;

Réciproquement, une inversion de l'orientation accompagnant une erreur de détermination de la verticale peut conduire soit à une réponse correcte (points du centre, certains points du bord ou médians) soit à la seule conservation de l'horizontale.

La signification des réponses Sv observées change donc selon les acquis des enfants : au vu des résultats précédents, on peut dire qu'après 6 ans - où les enfants maîtrisent la bidimensionnalité du quadrillage - il n'y a pratiquement plus d'inversions gauche/droite en repérage "côte à côte", alors que c'est la transformation utilisée de manière majoritaire dans la compensation du changement de point de vue pour la situation de repérage face à face. Nous allons étudier de façon plus précise la signification des réponses observées Sv pour les enfants de maternelle (4;6 et 5;6 ans) et les inférences que nous pouvons faire quant à leur représentation de l'orientation gauche/droite.

5. 2. Conservation de l'orientation gauche/droite dans les situations avec changement de point de vue compensable (côte à côte)

La nature des quadrillages (couleurs, noir, noir marqué) est sans effet significatif. L'ordre de présentation des positions semble jouer un rôle également très faible. Nous avons vu, à propos des invariants spatiaux, que cette similarité des situations se retrouvait lorsqu'on analysait les réponses pour chaque groupe de points. (Analyse faite sur les quadrillages N et C).

Si l'on considère les réponses d'ensemble des sujets, on observe que les réponses Sv sont isolées (un sujet répond de façon homogène "en symétrie"), de même que les erreurs de type Sv = h+ : il semble bien s'agir de difficulté à maintenir invariante cette orientation, d'une réponse à l'autre, et non d'une transformation globale.

Pour apprécier l'ampleur de cette difficulté (le nombre d'enfants qu'elle concerne), nous allons - d'une part revenir sur l'interaction entre l'utilisation d'invariants spatiaux généraux et la conservation de l'orientation en analysant en ce sens les données du tableau VII (p.) sur les réponses selon la nature des positions à repérer ;

- d'autre part, analyser de façon clinique les réponses de chacun des sujets de maternelle sur l'une des situations : celle avec le quadrillage noir marqué ;

- enfin construire des modèles de réponses et tester sa compatibilité avec les résultats globaux obtenus dans les autres situations.

5. 3. Interaction de la conservation de l'orientation et des autres invariants spatiaux

Le tableau VII (p. 32) nous donne les éléments suivants :

- alors qu'il n'y a pratiquement aucune erreur topologique, on affine sur les sommets, 20 % de réponses manifestent l'échec à conserver l'orientation gauche/droite (à 4;6 ans). Cela signifie-t-il que 20 % des enfants de 4;6 ans ne conservent pas l'orientation ? Non, nous avons déjà remarqué que les réponses Sv, d'une part étaient relativement isolées (donc le fait de beaucoup d'enfants) ; de plus les 4 sommets sont présentés successivement, il n'y a donc pas indépendance des réponses successives ; en particulier si le 1er sommet est placé correctement par un enfant qui choisit "au hasard" l'orientation, la probabilité de placer correctement les 3 autres est sans doute grande.

Une proportion de 40 % d'enfants ne maintenant pas l'orientation invariante est donc assez plausible.

- l'ensemble des erreurs qui conservent l'horizontale lors du repérage des positions de type B et M semble indiquer une plus grande difficulté des enfants à conserver l'orientation pour ces types de points (en effet le nombre important de réponses h+ n'a guère de raison d'être exclusivement attribué à des erreurs de position à partir d'une orientation bien conservée).

Cette analyse est compatible avec les résultats des enfants de 5;6 ans : il y a très peu de réponses en miroir pour les sommets (2,5 %), on en retrouve 6 % avérées pour les bords (et un nombre important de réponses de type Sv = h+).

5. 4. Etude individuelle des sujets de maternelle dans la situation Nm

A 4;6 ans (Mat1), 10 enfants sur 15 donnent à peu près autant de réponses Sv que de réponses correctes, c'est-à-dire répondent comme s'ils utilisaient indifféremment l'orientation correcte ou son inverse.

On voit apparaître ici une des explications du décalage important à cet âge entre le pourcentage des réponses correctes et celui des sujets qui réussissent : c'est sans doute autour de 60 % (10/15) des enfants qui repèrent indifféremment sur l'horizontale dans un sens ou un autre dès que la situation de repérage devient complexe et que les invariants spatiaux antérieurement acquis, ne suffisent plus au contrôle des réponses.

A 5;6 ans il n'y a plus que 3 sujets dans cette situation : le décalage entre le pourcentage de réponses correctes et celui des sujets qui réussissent tiendrait alors pour l'essentiel à la difficulté de repérage exact des positions sur les horizontales, orientées de façon stable.

L'analyse des réponses en situation de repérage face à face confirme l'intervention importante de représentations des changements de point de vue.

Nous avons vu qu'à 4;6 ans les réponses "en miroir" sont très nombreuses : or si l'orientation gauche/droite n'est pas conservée d'une réponse sur l'autre pour la majorité des enfants, il existe donc un autre phénomène qui se surajoute.

On peut supposer que le sujet conserve globalement la région du plan qui contient le pion à repérer : le pion du sujet sera alors placé dans la région du plan (par rapport à lui) qui contient déjà le pion de l'expérimentateur : alors la conservation sur l'axe proximal/distal et les conservations spatiales générales (topologiques et affines en particulier) conduisent à une réponse en miroir.

Dans le groupe des "petits" de maternelle, pour la situation Nm, cette fausse conservation d'une région définie par rapport au sujet, est compatible avec les réponses de 6 des 9 sujets qui ne différencient pas l'orientation dans le repérage sans changement de point de vue ; les 3 autres essayent de compenser le changement de point de vue par une transformation, dont l'un en inversant ici l'orientation "loin/près". Parmi les 3 sujets marquant une nette conservation de l'orientation, 2 effectuent une réponse d'ensemble fortement cohérente en miroir, l'autre inverse les 2 orientations (gauche/droite et haut/bas).

A 5;6 ans les 3 sujets qui ne différencient pas l'orientation en repérage direct, utilisent une (fausse) conservation de la région du plan.

Parmi les autres sujets, 5 font des réponses également compatibles avec cette fausse conservation. Enfin, 6 sujets sur les 11 ayant donné une majorité de réponses correctes essaient de compenser le changement de point de vue par des transformations "locales", instables, qui ne s'identifient pas à une réponse "en miroir", enfin 1 sujet effectue une réponse intégralement correcte.

Les sujets de plus de 6 ans, qui conservent l'orientation dans le repérage direct, utilisent de façon minoritaire cette fausse conservation de la région du plan :

- à 6;6 ans, sur 14 sujets, 4 seulement utilisent de façon dominante cette fausse conservation, 5 font une transformation cohérente Svh ou Sh, 2 réussissent à compenser complètement le changement de point de vue, 1 partiellement, et 2 sujets font des transformations locales inappropriées ;

- à 7;6 ans, 2 sujets font une réponse en miroir complètement cohérente, 3 essaient de compenser le changement de point de vue mais utilisent partiellement la fausse conservation (de la région du plan par rapport au sujet), 3 font une transformation cohérente Svh, 7 enfin donnent plus de 9 réponses correctes.

5. 5. Etude d'un modèle de réponses

Le modèle de réponses que nous allons présenter vise à apprécier l'interaction des divers éléments qui interviennent dans le repérage. Nous y faisons une hypothèse de travail - qui nous permet de construire le modèle mais dont nous avons toutes raisons de penser qu'elle n'est pas satisfaite pour toutes les positions présentées : c'est l'hypothèse de l'indépendance des positions successives. Par rapport aux hypothèses que nous faisons ensuite sur l'imprécision des repérages sur la verticale et sur l'horizontale, on peut considérer que l'indépendance des réponses est relativement acceptable pour les points du bord et les points médians ; de plus, on peut penser que lorsqu'il y a contradiction entre les éléments que l'enfant abstrait du déplacement et ceux qu'il tire de la position à repérer, c'est cette dernière - stable dans le temps qui est dominante.

Nous faisons donc le choix, en l'absence d'un modèle de dépendance des déplacements, d'utiliser un modèle construit sous cette hypothèse, en estimant que les informations que nous pourrons en tirer n'en seront pas affectées de façon trop dramatique, et apporteront des compléments aux analyses partielles précédentes. Un test de validité de ce choix nous paraît être la cohérence des résultats obtenus.

Nous construisons et testons un modèle simple pour dissocier deux éléments dans les procédures de réponses : l'erreur de position sur l'horizontale et la réponse en symétrie pour le repérage côte à côte.

Ce modèle part des hypothèses suivantes :

. pour chaque point à repérer, la probabilité d'erreur est indépendante de la réponse pour le point précédent ;

. de même la probabilité d'inversion gauche/droite ;

. les probabilités d'erreur de position et d'inversion sont indépendantes ;

. en cas d'erreur de position, les réponses "trop à gauche" ou "trop à droite" sont équiprobables.

Nous négligeons dans le modèle les inversions sur l'axe "vertical", extrêmement rares.

Nous notons :

θ : la probabilité de conservation de l'orientation gauche/droite,

α : la probabilité de détermination correcte d'horizontale,

β : la probabilité de position correcte sur l'horizontale, une fois choisie l'orientation.

Nous supposons que θ, α, β sont constants sur chaque groupe de S, B, M et C. Nous calculons pour chaque groupe de points les probabilités théoriques d'obtenir une réponse classable en +, Sv, h+ et h- et nous comparons ces probabilités aux pourcentages expérimentaux observés. Nous interprétons les solutions des équations ainsi obtenues comme une estimation "raisonnable" des valeurs des paramètres.

(Pour chacun des groupes d'âge, 4;6 et 5;6 nous avons regroupé les résultats des situations N et C, avec les deux ordres de présentation, pour obtenir un nombre suffisant de réponses).

Les répartitions selon le modèle sont données par le tableau suivant :

	+	Sv	h+	h-
S	$\alpha_S \beta_S \theta_S$	$\alpha_S \beta_S (1-\theta_S)$	$\alpha_S (1-\beta_S)$	$1-\alpha_S$
B	$\alpha_B\left[\beta_B \theta_B + \frac{(1-\beta_B)(1-\theta_B)}{4}\right]$	$\alpha_B\left[\beta_B(1-\theta_B) + \frac{\theta_B(1-\beta_B)}{4}\right]$	$\alpha_B \frac{3}{4}(1-\beta_B)$	$1-\alpha_B$
M	$\alpha_M\left[\beta_M \theta_M + \frac{(1-\beta_M)(1-\theta_M)}{4}\right]$	$\alpha_M\left[\beta_M(1-\theta_M) + \frac{\theta_M(1-\beta_M)}{4}\right]$	$\alpha_M \frac{3}{4}(1-\beta_M)$	$1-\alpha_M$
C	$\alpha_C\left[\beta_C \theta_C + \frac{(1-\beta_C)(1-\theta_C)}{2}\right]$	$\alpha_C\left[\beta_C(1-\theta_C) + \frac{\theta_C(1-\beta_C)}{2}\right]$	$\alpha_C \frac{1-\beta_C}{2}$	$1-\alpha_C$

<u>Le calcul des paramètres pour le groupe 4;6 ans donne :</u>

$\theta_S = 0,78$ $\theta_B = 0,76$ $\theta_M = 0,75$ $\theta_C = 1$

Le dernier résultat est aberrant : nous pensons que l'hypothèse d'indépendance des réponses pour les points du centre doit être rejetée.

Les valeurs de θ sur les autres points sont équivalentes, et les résultats compatibles avec une probabilité de conservation de l'orientation de 0,75.

La probabilité de détermination de la borne horizontale dépend des points; elle est la plus faible pour les points médians, où rappelons-le, les invariants topologiques ne suffisent pas à contrôler la position de l'horizontale, ni de la verticale.

$(\alpha_S \simeq 0,98$ $\alpha_B \simeq 0,92$ $\alpha_M \simeq 0,82$ $\alpha_C \simeq 0,88)$

quant à la probabilité de position correcte sur l'horizontale (une fois l'orientation choisie) elle varie également selon les points :

$(\beta_S \simeq 0,97$ $\beta_B \simeq 0,68$ $\beta_M \simeq 0,53$ $\beta_C \simeq 0,64)$

A l'exception des sommets, pour lesquels les invariants affines et topologiques assurent un contrôle des positions, les erreurs de position proprement dites apparaissent donc importantes, surtout pour le repérage sur l'horizontale.

<u>Le calcul des paramètres pour le groupe 5;6 ans donne :</u>

$\theta_S = 1$ $\theta_B = 0,78$ $\theta_M = 0,90$ $\theta_C = 0,94$

Ces résultats ne sont pas compatibles avec l'hypothèse que les non conservations reflètent une certaine organisation spatiale, non contingente aux points à repérer. Il nous paraît difficile d'attribuer ces différences à des aléas statistiques ; mais nous ne voyons pas quelle hypothèse doit être rejetée.

Les incertitudes de positions apparaissent les suivantes :

$\alpha_S = 1$ $\alpha_B = 0{,}90$ $\alpha_M = 0{,}76$ $\alpha_C = 0{,}85$

$\beta_S = 0{,}99$ $\beta_B = 0{,}88$ $\beta_M = 0{,}76$ $\beta_C = 0{,}79$

Les incertitudes sont les mêmes sur l'horizontale, et sur la verticale ; elles dépendent des propriétés des groupes de points: sur les points médians (où l'hypothèse d'indépendance des réponses est très plausible) la probabilité de repérage correct n'est encore que de .76.

L'asymétrie observée pour les dimensions "horizontale" et "verticale", relativement marquée à 4;6 ans, est essentiellement due aux problèmes d'orientation pour les enfants de 5;6 ans.

L'incertitude d'orientation gauche/droite apparaît relativement faible, en tant que phénomène de groupe, même à 4;6 ans.

5.6. <u>La conservation de l'orientation gauche/droite est-elle liée aux positions respectives du sujet et de l'expérimentateur ?</u>

Nous avons avancé plus haut l'hypothèse que la présence d'un observateur avec son propre repère "orientait" l'espace pour le sujet (ce qui expliquerait le moindre nombre de réponses en miroir observées par rapport à d'autres travaux).

S'il en est ainsi, on peut supposer une asymétrie dans les réponses pour les points homologues des deux hémi-champs droit (où est l'observateur) et gauche. En effet quand l'expérimentateur place un point à (sa) droite, le point est à la fois dans l'hémi-champ droit et à droite : une réponse conservant l'hémi-champ est alors correcte. Quand le point est posé à gauche, il y a conflit entre conservation de l'hémi-champ et conservation de l'orientation relative au repère : on doit alors trouver davantage de réponses symétriques.

Le tableau suivant donne la répartition des réponses correctes et en symétrie selon la place des points (à droite ou à gauche) pour les enfants de 4;6 ans dans les différentes situations. (Les points du centre sont exclus).

	Réponses correctes points à gauche	à droite	Réponses en symétrie points à gauche	à droite
Couleur C ⟶ B	13	29	14	4
Couleur B ⟶ C	40	33	6	9
Noir C ⟶ B	17	26	16	5
Noir B ⟶ C	26	19	4	11
Couleur	53	62	20	13
Noir	43	45	20	16
C ⟶ B	30	55	30	9
B ⟶ C	66	52	10	20
TOTAL	96	107	40	29

L'hypothèse faite est vérifiée pour l'un des deux ordres de présentation des points (C ⟶ B), indépendamment de la nature du quadrillage : pour les points de gauche il y a autant de réponses en symétrie que de réponses correctes, alors que les réponses correctes dominent massivement pour les points de droite. Pour l'ordre de présentation (B ⟶ C) l'effet est plutôt contraire, bien que faible : nous ne voyons actuellement pas d'explication à cette différence. Nous pouvons seulement dire que l'orientation de l'espace selon l'axe gauche/droite se confirme comme un phénomène complexe...

5.7. <u>En conclusion</u> : l'ensemble des éléments étudiés conduit à quelques hypothèses sur la conservation de l'orientation sur chacune des dimensions "horizontale" et "verticale".

a) L'orientation sur l'axe proximal/distal est très massivement conservée dans le repérage sans changement de point de vue ; dans le cas de repérage en face à face des compensations erronées du changement de point de vue peuvent conduire à sa non-conservation : celle-ci reste rare, et souvent locale, c'est-à-dire ne se produisant que pour une ou deux réponses sur l'ensemble de celles d'un sujet.

b) L'orientation gauche/droite connaît de 4 à 6 ans une évolution complexe :

- à 4;6 ans, lorsque les invariants spatiaux précédemment acquis, et en particulier les invariants topologiques et affines, guident le repérage (cas des sommets), la conservation de l'orientation gauche/droite peut être considérée comme mise en oeuvre par environ 60 % des enfants, mais lorsque ces invariants ne peuvent fonctionner (certains points du bord, médians), les confusions gauche/droite augmentent en même temps que les imprécisions de repérage, et il n'y a plus que 30 à 40 % des enfants qui conservent l'orientation gauche/droite ;

- à 5;6 ans, il y a moins de 20 % d'enfants qui ne conservent pas l'orientation pour les positions complexes ;

- à 6;6 ans, la conservation de l'orientation est acquise, ainsi que le repérage précis sur l'horizontale - dans un domaine où le nombre des coordonnées est petit, et où il s'agit - rappelons-le - d'un repérage discret et non continu (la constitution de la mesure pose d'autres problèmes).

Lorsqu'il y a un changement de point de vue que le sujet ne peut compenser directement (par un mouvement du corps propre), les problèmes de repérage et de conservation des orientations proximal/distal et gauche/droite interfèrent avec la nécessité pour le sujet de compenser le changement de point de vue.

En situation de face à face, une (fausse) conservation d'une région du plan (qui contiendra le pion de l'expérimentateur et celui du sujet) conduit à des réponses où l'orientation semble paradoxalement stable (et inversée).

Lorsque l'enfant conserve l'orientation stable, la fausse conservation de la région du plan peut entrer en contradiction avec la nécessité d'effectuer une compensation au changement de point de vue, qui tienne compte de l'orientation.

Les formes de compensation dépendent non seulement des acquis des enfants sur le repérage mais aussi de leurs acquis sur les changements de point de vue dans l'espace et des éléments spécifiques du repérage en cours qui introduisent d'éventuelles contradictions aux compensations erronées effectuées : d'où une raison des différences notables observées (1) pour les différentes situations de repérage face à face (effets liés de la nature du quadrillage et de l'ordre de présentation des positions).

(1) Nous n'avons toutefois pu repérer quels éléments modifiaient au cours même du repérage les types de compensation mis en oeuvre : une telle recherche nécessite une investigation coûteuse en temps et qui sortait du cadre de nos objectifs.

6. Etude de la situation "déspatialisée" d'identification des carrefours : signification des réponses ; effets ultérieurs sur le repérage

6. 1. L'analyse des situations de repérage intrinsèque (quadrillage couleur) et purement spatial (quadrillage noir) a montré que les enfants répondent essentiellement de façon non différenciée à ces deux types de repérage. Pourtant les couleurs permettent d'identifier un carrefour par la seule "valeur" du couple des couleurs des bandes et ne nécessitent pas de coordonner des positions relatives dans deux directions.

Les échecs des sujets les plus jeunes sont-ils dus à la difficulté à coordonner deux informations (deux couleurs, deux positions relatives) ou bien s'agit-il spécifiquement d'une difficulté à prendre en compte des éléments non spatiaux (les couleurs) dans une tâche spatiale.

Nous avons introduit la tâche déspatialisée d'identification des carrefours pour tester ces hypothèses :

Avec la première hypothèse on ne devrait pas observer de meilleures réussites dans l'épreuve d'identification des carrefours que dans celle du repérage sur des quadrillages "couleur".

En fait on devrait même, sur un groupe homogène de sujets (1), observer globalement moins de réponses correctes : en effet, dans le repérage spatial, les enfants peuvent utiliser des invariants spatiaux plus précocement acquis

(1) Bien entendu nous n'avons pas la garantie que des enfants du même âge et de la même classe forment un tel groupe homogène. Néanmoins, l'hypothèse faite sur l'existence de forts invariants dans l'acquisition de concepts bidimensionnels, semble renforcée par la régularité des résultats obtenus et la cohérence de l'ensemble de nos données (la comparaison des 5 situations de repérages "directs", celles de 2 groupes passant la situation "carrefour" va dans ce sens).

que la combinaison de deux informations (c'est ce que nous avons vu avec l'analyse des invariants topologiques) ; or ces invariants ne sont pas disponibles dans l'identification des carrefours.

Avec la seconde hypothèse, l'utilisation des couleurs ne serait pas spontanément disponible mais serait mobilisable à condition d'introduire une contrainte appropriée : l'identification des carrefours devrait alors être plus facile que le repérage ; de plus une tâche ultérieure de repérage intrinsèque devrait être nettement mieux réussie après l'identification des carrefours qu'après un repérage direct. Pour évaluer le domaine de validité de cet effet d'utilisation d'éléments intrinsèques nous avons introduit le repérage sur un quadrillage noir - marqué (après une identification de carrefours : le couple de couleurs des marges est-il utilisable par les enfants qui ont identifié correctement les carrefours ?

6. 2. La reprise des données des figures 4a et b sur les réussites donne de premiers éléments sur la validité des hypothèses précédentes.

6. 2.1. Les réponses sont globalement meilleures pour les carrefours que pour le quadrillage couleur, et les réussites des sujets plus nombreuses. Cependant la situation est différente pour les deux niveaux Mat1 et Mat2 (4;6 ans et 5;6 ans) où les enfants ne réussissent pas massivement les tâches de repérage :

- à 4;6 ans, l'amélioration est faible pour les réponses mais nette sur le pourcentage de sujets qui réussissent : notre interprétation est la suivante : un certain nombre d'enfants ont effectivement des difficultés à coordonner deux informations et ne s'en tirent pas mieux de l'identification des carrefours que de celle du repérage spatial (1), pour d'autres enfants, la seconde

(1) Nous exprimons notre interprétation comme s'il s'agissait des mêmes enfants dans les 2 situations : en fait, nous ne pouvons que réitérer l'hypothèse de représentativité des sujets (dont nous rappelons qu'elle est sous-jacente à toute la psychologie génétique) : la seule question méthodologique porte sur le nombre de sujets.

hypothèse est valide : ils utilisaient avec une relative difficulté des coordinations dimensionnelles spatiales (appuyées sur les invariants spatiaux déjà acquis) - d'où peu de réussites complètes au repérage - mais si la situation les conduit à coordonner des informations non spatiales (sur la dimension "couleur" acquise à cet âge) ils le font de façon fiable.

Cette interprétation de 2 "sous-populations" est par ailleurs cohérente avec l'existence d'un pourcentage relativement important de réponses ne respectant que l'une des "dimensions", le plus souvent la couleur de l'horizontale, dans l'identification des carrefours.

- à 5;6 ans, la composition des informations est massivement utilisée : pour l'essentiel des enfants la seconde hypothèse est valide : la composition n'était pas disponible mais elle est mobilisable (40 % de sujet réussissent le repérage sur le quadrillage couleur, 95 % identifient les carrefours correctement)(1).

6. 2.2. Les données obtenues sur le repérage en face à face avec le quadrillage couleur après l'identification des carrefours précisent les résultats précédents :

- à 4;6 ans l'identification des carrefours, possible pour certains enfants seulement, n'a pas d'effet sur la tâche spatiale ultérieure :

- à 5;6 ans les enfants bénéficient de la mobilisation produite dans l'épreuve d'identification des carrefours (60 % de sujets réussissent), cependant il ne s'agit pas de tous les sujets.

---

(1) La correction introduite après chaque réponse est la même dans cette situation que lors de la phase de familiarisation pour le repérage.

Il est possible que l'existence d'une transformation complexe comme celle du changement de point de vue introduise un problème dont les enfants n'arrivent pas à se dégager, cependant qu'ils ne sont pas capables des compensations nécessaires ; il est possible aussi que l'analyse de la "valeur" du carrefour correspondant à la position du pion de l'E introduise une difficulté complémentaire.

Au vu de ce qui se passe pour les enfants plus âgés dans l'une des situations de repérage face à face, la première interprétation nous semble la plus plausible : l'impact des difficultés spatiales "bloquerait" à la fois la disponibilité et la mobilisation possibles d'actions efficaces mais non spatiales.

6. 2.3. La situation de repérage avec un quadrillage noir marqué, après l'identification des carrefours montre la limite du domaine de validité des opérations mobilisées pour l'identification : les marques qui "codent" chaque horizontale et chaque verticale ne sont pas utilisées par les enfants. Les réponses correctes, les réussites globales, le respect des invariants dimensionnels sont les mêmes pour la situation Nm et pour les situations N. Une seule exception concerne les réussites individuelles dans la disposition face à face : Nm est significativement meilleure que N, et plus proche de la situation C (à ordre de présentation constant, du centre vers le bord). Pour certains sujets le marquage des bandes peut jouer un rôle de contrôle, lorsque la situation spatiale est relativement maîtrisée.

La mobilisation de la combinatoire des couleurs obtenue avec l'identification des carrefours a donc un domaine de validité limité aux situations où le repérage ne fait pas appel à l'analyse du quadrillage selon ses 2 dimensions : cela ne signifie pas qu'il soit impossible de mobiliser cette utilisation de l'indexation des marges, mais qu'elle n'est pas spontanément disponible.

7. CONCLUSION

7.1. BIDIMENSIONALITE DU REPERAGE PLAN

Rappelons les questions spécifiques que nous posions dans l'analyse de l'acquisition de la bidimensionalité du repérage dans un plan quadrillé, avec un petit nombre de mailles :

Quelle relation apparaît entre l'acquisition de la bidimensionalité spatiale et l'identification d'un repère quadrillé fini à un produit ensembliste de marques distinctes (ici des couleurs) ?

Quels invariants spatiaux sont disponibles dans les représentations des enfants pour l'identification d'une position ?

Quelle évolution apparaît dans leur utilisation ? Sont-ils hiérarchisés ou les divers invariants interviennent-ils dans le contrôle des réponses fournies ?

En particulier quel statut ont les invariants dimensionnels : respect de l'une et/ou l'autre des dimensions "horizontale" et "verticale" relative au sujet ?

Quelles sont les interactions entre les invariants spatiaux "disponibles" et les changements de point de vue en jeu dans le passage d'une position sur le repère de l'expérimentateur à la position analogue sur le repère du sujet ?

Quel est le domaine de validité des représentations bidimensionnelles des enfants, quelles difficultés apparaissent, quels obstacles peuvent être supposés ?

Le premier point à souligner est la précocité de certains repérages bidimensionnels corrects, par rapport aux acquis sur le produit de dimensions :

dès 6 ans pratiquement tous les enfants identifient correctement les positions quand leur point de vue et celui de l'expérimentateur sont "parallèles" et proches.

L'identification intrinsèque d'une position à un couple de marques distinctes est plus précoce que le repérage spatial; dès 5 ans pratiquement tous les enfants (plus de 90 %) identifient une position par la donnée des deux lignes de couleur qui s'y croisent, mais cette identification doit être sollicitée par une contrainte particulière : si l'identification des positions est présentée dans une situation spatiale, alors le repérage intrinsèque (identifiant une position au couple des lignes qui s'y croisent) n'est pas spontanément utilisé et ce sont les éléments spatiaux qui sont mis en oeuvre. (1)

Les invariants topologiques sont utilisés massivement vers 4 ans (moins de 10 % d'erreurs topologiques) ; les propriétés affines (différenciation des angles) un peu décalées - mais très peu ; les propriétés de type métrique (près/loin du bord) jouent un rôle important - moins fort que les invariants topologiques et affines - dès 5 ans. Cependant, la fiabilité de cette mise en action des invariants spatiaux évolue fortement : les enfants de 4 ans sont peu fiables (mais il y a quand même 35 % de "sans faute" topologiques), ceux de 5 ans ne le sont pas tous (60 % de "sans faute").

La fiabilité "topologique" acquise seulement à 6 ans doit se traduire dans des difficultés pour les enfants plus jeunes lorsqu'il s'agit de reproduire des patterns et non d'identifier simplement une position : moins il y a des relations topologiques internes au pattern, plus les erreurs doivent être fréquentes (cas extrême : points dispersés).

Les invariants dimensionnels (point sur la "bonne horizontale", ou sur la "bonne" verticale) ont une évolution différente selon la dimension considérée :

---

(1) Voir G. Piéraut-Le Bonniec et S. de Schonen (1976) pour les relations entre marquages et activités.

L'horizontale est conservée pratiquement par tous les enfants dès 4 ans : ils prennent donc déjà correctement en compte l'éloignement de la position à repérer par rapport à l'observateur (expérimentateur et sujet lui-même), c'est-à-dire la position sur l'axe "proximal/distal". Nous retrouvons ici, dans le cadre spécifique du repérage plan, la priorité d'acquisition de la relation "devant/derrière" / "près/loin" sur les autres relations spatiales (toutes choses égales par ailleurs) (Samurçay, 1984), (en repérage côte à côte respectivement : 37 % et 6 %).

Le repérage de la verticale est plus complexe ; deux difficultés spécifiques y interviennent : d'une part la prise en compte correcte de l'invariant d'orientation gauche/droite (dont on sait qu'il est acquis plus tard que celui devant/derrière, toutes choses égales par ailleurs), d'autre part, la précision de la localisation sur l'horizontale. C'est la seule difficulté qui apparaisse dans la situation déspatialisée d'identification des carrefours ; à 4 ans elle n'est pas négligeable, bien que déjà largement résolue.

Le caractère privilégié de l'acquisition du repérage selon l'axe proximal/distal se manifeste en effet même dans la situation "déspatialisée" où l'enfant doit identifier une position pour le couple des couleurs des lignes qui s'y croisent : 20 % des enfants conservent en effet la seule couleur de "l'horizontale", 8 % la seule couleur de la "verticale".

L'orientation gauche/droite est en revanche une acquisition qui se heurte à l'obstacle de la forte symétrie de l'espace visuo/moteur par rapport au plan médian "vertical" du sujet (alors que cet espace est complètement asymétrique par rapport au plan frontal du sujet : ce qui est <u>devant</u> est visible et atteignable, ce qui est derrière ne l'est pas).

Si dès 5 ans les erreurs de position sont négligeables, des confusions d'orientation subsistent.

Cependant, l'existence d'un autre observateur que le sujet (l'expérimentateur) doit, selon nous, contribuer à "orienter" la dimension horizontale de l'espace, lorsque observateur et enfant sont côte à côte ou plus généralement lorsque l'observateur est situé dans une des deux régions (droite ou gauche) de l'espace par rapport au sujet (biais) : on observe en effet beaucoup moins de localisation "en miroir" que dans des situations (avec nombre d'éléments analogue) où il y a un seul observateur (le sujet) et deux repères devant lui (Baudonnière, 1976).

Par ailleurs, l'orientation gauche/droite (lorsque la présence de l'observateur avec son repère contribue à orienter l'espace) est mieux prise en compte quand les invariants affines et topologiques guident le repérage : environ 60 % des enfants de 4 ans respectent alors l'orientation, sinon il n'y en a plus que de 30 à 40 % (ce qui n'est pas négligeable !). A 5 ans les divers invariants topologiques affines, et de type métrique étant complètement acquis, cette différenciation s'estompe, et il n'y a plus que 20 % environ des enfants qui ne conservent pas l'orientation. Après 6 ans la conservation de l'orientation gauche/droite est acquise, comme les autres invariants dimensionnels.

7. 2. BIDIMENSIONALITE DU REPERAGE PLAN ET CHANGEMENTS DE POINT DE VUE

Les invariants dont nous venons de tracer l'acquisition sont inégalement disponibles selon les changements de point de vue en jeu dans le passage du repère de l'expérimentateur à celui du sujet.
Ni l'origine marquée sur le repère, ni les marques de repérage intrinsèques ne suffisent à donner au repère fourni un statut indépendant du point de vue de l'observateur, dans les tâches non contraignantes, et sans modalités extérieures de contrôle sur les réponses fournies (déplacements du repère et du sujet exclus) que nous avons analysées pour étudier les représentations disponibles.

Si les invariants topologiques, affines et métriques apparaissent indépendants des "points de vue" il n'en est pas de même des autres invariants.

Certes au moins une dimension "horizontale" ou "verticale" (par rapport au sujet) est conservée dès 6 ans, mais d'une part de 10 à 25 % des petits de 4 ans ne peuvent conserver au moins une de ces dimensions lorsque les repères sont en face à face, d'autre part la conservation de l'horizontale (c'est-à-dire de l'éloignement par rapport au sujet sur l'axe proximal/distal) est moins assurée qu'en côte à côte jusqu'à 7 ans.

Enfin, l'orientation gauche/droite n'est pas conservée dans une partie importante des réponses des enfants de 7 et 8 ans : faute d'utiliser le repère avec sa propriété fondamentale d'identification possible de toute position, ils échouent à compenser correctement le changement de point de vue.

Or, le changement de point de vue met en oeuvre non plus simplement la bidimensionalité du plan, mais des représentations beaucoup plus complexes de l'espace et des déplacements spatiaux, qui semblent comporter des obstacles que ne franchissent pas tous les sujets (1). Le domaine de validité des acquisitions sur le repérage bidimensionnel est donc limité par le statut du repère. Celui-ci n'est pas spontanément utilisé par l'enfant (et nous pensons, en général par les sujets) avec ses caractéristiques intrinsèques, et dont l'origine marquée devrait permettre, en théorie, un repérage indépendamment des positions d'un quelconque observateur. Il semble au contraire que le repère ait un statut que nous qualifierons de dynamique, à savoir : associé à un observateur (comme c'est le cas dans les repères en mécanique...) ; les invariants du repère en fonction des déplacements de l'observateur sont alors à construire dans le cadre plus général des représentations de l'espace comme lieu de déplacements potentiels ou réels. L'acquisition de la bidimen-

---

(1) Que l'on prenne la faible corrélation de tests spatiaux avec les autres dans les échelles métriques de l'intelligence (Zazzo, 1966), ou les difficultés à classer les épreuves de changement de perspectives dans les stades piagétiens (Longeot, 1978), il apparaît exister une difficulté spécifique.

sionalité ne règle à l'évidence pas le franchissement de cet obstacle, dont on retrouve les traces dans les échecs des étudiants en mécanique lorsqu'il s'agit de prendre en considération plus d'un repère..

7.3. BIDIMENSIONALITE SPATIALE/BIDIMENSIONALITE ENSEMBLISTE

Les rapports entre produit cartésien et organisation multiplicative du plan ont été étudiés d'une part à travers les rapports entre relations ensemblistes et relations spatiales (intervention des dispositions spatiales en produit lignes x colonnes dans les constructions de produits ou les correspondances entre produits F x C) et d'autre part à travers l'étude du repérage avec un quadrillage identifiable à un produit de deux ensembles disjoints de couleurs (repérage "couleur" et repérage "déspatialisé"). L'ensemble des résultats obtenus indique l'existence d'interactions complexes :

- les identifications de couples de valeurs de dimensions comme la couleur et la forme, facilitent le repérage de positions du plan, elles permettent de répondre correctement à des tâches où un changement de point de vue de l'observateur introduit un obstacle au repérage spatial ; elles jouent donc un rôle constructif, (utilisé d'ailleurs à un autre niveau de complexité avec le codage des points du plan) ; cependant, ces identifications précoces n'impliquent pas pour l'enfant l'existence d'une représentation "dimensionnelle", et a fortiori bidimensionnelle, de l'ensemble des éléments ou des positions en jeu ;

- l'organisation spatiale selon deux directions liées au sujet : l'axe proximal/distal, l'axe fronto-parallèle, introduit un acquis dimensionnel spécifique ; en particulier la précocité de la prise en compte de la dimension "près/loin" permet une organisation au moins unidimensionnelle des alignements parallèles au sujet. Ces alignements jouent alors un rôle producteur par rapport au produit de dimensions : la relation de ressemblance selon une dimension, lorsqu'elle se transcrit par une disposition côte à côte des éléments, aboutit à une représentation de facto de la dimension commune qui coïncide avec une dimension spatiale acquise : celle-ci peut alors en retour permettre, au niveau de l'action, une plus grande prise en compte de la dimension du produit ensembliste (1) ; il faut souligner également ici que cette prise en compte de la dimension ou des dimensions ne produit pas nécessairement des effets sur le système de représentations de l'enfant (ainsi par exemple, les "réussites" à la mise en correspondance de deux produits F x C quand la disposition du support est un produit de lignes et de colonnes ne se transfèrent pas à des mises en correspondance avec d'autres dispositions spatiales...).

Les rapports entre produit de dimensions et organisation multiplicative du plan apparaissent donc comme non univoquement orientés : l'interaction entre les deux champs conceptuels est à la fois très précoce, et peut jouer sur une longue période un rôle producteur pour les acquisitions cognitives liées à la bidimensionnalité.

Sur le plan didactique, il nous semble que cela ouvre la perspective d'un possible "jeu de cadres"(Douady, 1984) (2) dans la construction du produit cartésien, et dans la représentation analytique de l'espace comme objets d'enseignement.

---

(1) Ainsi, A.M. Pinelli a montré, avec des élèves de CP, que des tâches d'organisation d'un produit F x C dans une matrice (où les marges sont identifiées explicitent à F et C) facilitent la construction ultérieure d'un produit ensembliste F x C. (Pinelli, 1978).

(2) En rapport avec le développement conceptuel dans le domaine numérique.

Positions QE/QS	"déspatialisé"		Côte à côte (0°)					Biais (45°)	Face à face (180°)					
Exp. / niveaux	Carr. 1	Carr. 2	C (C→B)	N (C→B)	Carr. 2 → Nm (C→B)	N (B→C)	C (B→C)	N (C→B)	Carr. 1 → C (C→B)	Carr. 2 → Nm (C→B)	C (C→B)	N (C→B)	N (B→C)	C (B→C)
MAT1	61	67	53	55	44	49	61		36	8	23	7	6	22
MAT2	96	96	76	67	70	62	76	54	87	25	32	30	8	62
CP		99	97	95	90	99	94	80		21	40	27	23	62
CE1		100	98	97	98	97	92	82		47	62	39	46	59
CE2			98	99		99	99				60	66	46	50
Total MAT2→CE1		98	90	86	86	86	87	72		31	45	32	25	60

(C → B) : parcours des positions du centre du quadrillage vers le bord ; (B → C) parcours inverse.

TABLEAU SOURCE 1

Pourcentage de réponses correctes

Positions QE/QS	"déspatialisé"		Côte à côte (0°)					Biais (45°)	Face à face (180°)					
Exp. / niveaux	Carr. 1	Carr. 2	C (C→B)	N (C→B)	Carr. 2 →Nm (C→B)	N (B→C)	C (B→C)	N (C→B)	Carr. 1 → C (C→B)	(Carr. 2) C→Nm (C→B)	C (C→B)	N (C→B)	N (B→C)	C (B→C)
MAT1	4 (4)	6 (7)	0 (7)	0 (1)	1 (1)	0 (1)	1 (4)		0 (0)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
MAT2	8 (9)	14 (14)	4 (5)	2 (3)	4 (7)	2 (3)	6 (9)	1 (1)	6 (8)	1 (1)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	6 (7)
CP		14 (14)	12 (12)	9 (10)	10 (12)	10 (10)	25 (26)	4 (5)		2 (2)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	
CE1		15 (15)	11 (12)	10 (10)	15 (15)	8 (8)	13 (15)	8 (8)		4 (4)	4 (5)	1 (1)	1 (2)	
CE2			11 (12)	10 (10)		10 (10)	15 (15)				3 (3)	5 (7)	1 (1)	
Total MAT2→CE1														

TABLEAU SOURCE 2

Nombre de sujets faisant 0, 1 ou 2 erreurs. (En petits caractères: faisant 0, 1, 2 ou 3erreurs)

Mat 1 (4 ans ; 6)

Rép. / Points	+	S_v	$S_v \equiv h_+$	h_+	v_+	p	X
S	33 25	3 12		2 1		 2	2
B	20 21	6 5	1 2	9 9	4 1		 2
M	15 13	3 2	7 6	12 13	3 3	 2	 1
C	25 23		7 10	7 3	1 3	 1	
Total	93 82	12 19	15 18	30 26	8 7	 5	2 3

" Couleur "

Rép. / Points	+	S_v	$S_v \equiv h_+$	h_+	v_+	p	X
S	31 30	8 10		1 			
B	18 20	6 7	3 2	9 9	4 1		 1
M	16 10	4 5	1 4	11 9	5 10	2 1	 1
C	26 18		 8	10 7	2 2	3 4	 1
Total	91 78	18 22	4 14	31 25	11 13	5 5	 3

" Noir "

Mat 2 (5 ans; 6)

Rép. / Points	+	S_v	$S_v \equiv h_+$	h_+	v_+	p	X
S	39 38	 2		1			
B	27 28	3 3	1 3	4 4	4 2		1
M	22 28	~~1~~ 1	4 1	4 5	8 5	2	
C	19 34		5 3	4 3	5	4	3
Total	107 118	3 6	10 7	13 12	17 7	8	4

"Couleur"

Rép. / Points	+	S_v	$S_v \equiv h_+$	h_+	v_+	p	X
S	38 39	2		 1			
B	26 23	4	7 6	3 2	 7	 1	 1
M	13 21	1 1	4 2	10 4	7 10	4 2	1
C	22 24		8 6	4 4	4 4	2	 2
Total	99 107	~~7~~ 1	19 14	17 10	11 21	6 3	1 3

"Noir"

Positions QS/QE	"déspatialisé"		Côte à Côte (0°)					Biais (45°)	Face à Face (180°)					
Exp. / Niveaux	Carr. 1	Carr. 2	C (C→B)	N (C→B)	C→Nm (C→B)	N (B→C)	C (B→C)	N (C→B)	Carr. 1 →C (C→B)	Carr. 2 →Nm (C→B)	C (C→B)	N (C→B)	N (B→C)	C (B→C)
MAT1	22	19	38	39	40	35	33		46	44	37	43	45	51
MAT2	7	6	19	16	25	26	11	20	9	53	36	49	55	15
CP		-	3	3	8	-	3	10		36	40	44	70	16
CE1		-	2	1	1	2	3	1		30	34	40	32	4
CE2			2	1		-	1				22	13	34	35
Total (MAT2→CE1)		2	8	7	11	9	6	10		40	37	44	52	12

Tableau X

Pourcentage de réponses conservant l'"horizontale" seule.

Positions ΦE/QS	"déspatialisé"		Côte à côte (0°)					Biais (45°)	Face à face (180°)					
Exp. / niveau	Carr. 1	Carr. 2	C (C→B)	N (C→B)	C→N (C→B)	N (B→C)	C (B→C)	N (C→B)	Carr.1 → C (C→B)	Carr.2 → N_m (C→B)	C (C→B)	N (C→B)	N (B→C)	C (B→C)
MAT1	9	8	5	9	9	5	4		8	9	14	-	4	8
MAT2	1	2	4	14	4	6	8	10	2	3	21	4	6	19
CP		1	-	1	2	-	1	5		12	13	3	2	18
CE1		-	-	1	-	-	3	2		5	3	9	13	34*
CE2			-	1		-	-				5	5	7	5
Total MAT2→CE1		1	1	5	2	2	4	6		7	12	5	7	24*

(* 5 sujets font plus de 9 réponses en symétrie "horizontale")

Tableau XI

Pourcentage de réponses conservant la "verticale" seule.

Positions QE/QS	"déspatialisé"		Côte à côte (0°)					Biais (45°)	Face à face (180°)					
Exp. / Niveau	Carr. 1	Carr. 2	C (C→B)	N (C→B)	C→N_m (C→B)	N (B→C)	C (B→C)	N (C→B)	Carr. 1 → C (C→B)	Carr. 2 → N_m (C→B)	C (C→B)	N (C→B)	N (B→C)	C (B→C)
MAT1	–	2	5	4	6	3	2		4	17	17	24	26	12
MAT2	–	–	1	4	2	6	5	13	–	10	6	4	13	14
CP		–	–	–	1	–	–	3		4	4	3	–	2
CE1		–	–	–	1	–	1	2		1	1	3	4	1
CE2			1	–		–	–				1	2	3	1
Total MAT2→CE1		–	–	1	1	2	2	6		5	4	3	6	6

Tableau XII

Pourcentage de réponses pour lesquelles aucune dimension n'est conservée.

PARTIE IV

1. Les mesures spatiales: un champ conceptuel complexe où les questions multiplicatives jouent un rôle déterminant — 4

2. Méthodologie et dispositif expérimental — 10

3. Bilan des résultats d'ensemble — 23

4. Acquisition de l'unidimensionalité de la mesure-longueur — 26

5. Acquisition de la bidimensionalité de la mesure-surface — 29

6. Conclusion — 49

ANNEXES — 52

0. *Dimensionalité des mesures spatiales*

Les mesures spatiales de longueur, surface et volume ont, dans le champ des problèmes de la didactique une situation déterminée à la fois par leur statut dans la connaissance, par leurs caractéristiques comme objets mathématiques et par la façon dont elles sont définies comme objet d'enseignement.

On sait le rôle que jouent dans le développement cognitif les opérations de décompte (construction et structuration des nombres entiers...) et de mesure (construction des quantités physiques et spatio-temporelles...), opérations décisives pour l'élaboration de la connaissance, la régulation des actions, le remplacement du tâtonnement empirique par le calcul sur les représentations. On sait aussi que les premières notions qu'en a l'enfant s'élaborent de façon précoce, à partir de ses actions sur le monde, et avant l'intervention de l'enseignement institutionnalisé. Cette élaboration dépend évidemment des représentations socialisées existant, à la fois dans le proche milieu de l'enfant et dans la culture dans laquelle il vit.

Lorsque l'enseignement intervient sur ces points, il concerne donc des enfants, ou de jeunes adolescents, qui ont déjà des représentations assez élaborées, même lorsqu'elles sont « fausses » au regard de la connaissance scientifique.

L'étude du fonctionnement de l'enseignement, la construction et l'analyse des situations didactiques, comportent donc une interrogation précise sur ces représentations des élèves et sur leur intervention dans les processus didactiques. Or les mesures spatiales ont une place spécifique, nous semble-t-il, par rapport à la didactique des mathématiques :

Dans le développement cognitif

—d'une part, elles se distinguent des autres quantités par le fait qu'elles sont à l'articulation de concepts « physiques », relatifs aux propriétés et transformations des objets matériels, et de concepts « spatiaux » qui interviennent dans l'organisation des activités cognitives sur l'espace. (Ce n'est pas le cas pour la masse, le poids, ni les probabilités - le temps occupant une autre place spécifique).

—d'autre part, elles mettent en jeu une coordination de concepts à caractère « géométrique », portant sur une représentation « qualitative » de l'espace, et de concepts numériques, débouchant sur le progrès décisif dans le développement cognitif que constitue le calcul des mesures.

Un double processus de mathématisation est ainsi à l'œuvre dans l'élaboration des concepts spatiaux, pour l'étude de laquelle la spécificité de la problématique didactique doit intervenir, car elle ne peut relever de la seule problématique psychologique. On constate d'ailleurs que dans le champ considérable des recherches sur le développement cognitif effectuées à partir des conservations, les conservations spatiales sont peu étudiées ès qualités : le relevé de 300 publications réparties sur les deux périodes 1965-1969 et 1973-1977 donne ainsi 12% sur les conservations du nombre, 15% sur les quantités physiques (« quantité », masse, substance, poids), 5% sur la longueur et moins de 3% pour la surface et le volume réunis (ce sont essentiellement le fait d'études d'épistémologie génétique piagétiennes).

Dans le processus d'enseignement

Enfin, leur statut dans l'enseignement les distingue aussi des quantités physiques dont l'acquisition des notions est contemporaine : celles-ci deviennent rapidement des objets d'enseignement de la physique, alors que les quantités spatiales demeurent des objets d'enseignement mathématique attestés : la place de la mesure et de l'intégration dans l'enseignement supérieur en mathématique en est une manifestation, comme les questions de « métrisation » d'autres espaces que R^3.

Néanmoins les mesures spatiales, y compris la surface et le volume, deviennent rapidement, dans le cursus scolaire obligatoire, des objets d'enseignement obsolescents : l'élève les rencontre comme objets de connaissance pratique à la fin de l'enseignement élémentaire — et en apprend des « formules de calcul » — les revoie, brièvement en général, au début du premier cycle du secondaire, et ne les rencontre plus ensuite que comme « supports » éventuels d'autres notions : calcul sur les décimaux, sur les fractions, ou comme lieu d'application des propriétés des réels. C'est seulement en fin du second cycle, dans les sections scientifiques, que les mesures spatiales retrouvent le statut d'objet d'enseignement, avec l'intégration.

Historiquement, les objets mathématiques liés à l'espace ont subi au XIX^e et XX^e siècles des transformations profondes au cours desquelles la géométrie comme champ mathématique (de recherches) s'est éloignée des représentations « spontanées » alors qu'on peut encore voir fin XVIII^e, une continuité entre ces représentations et des recherches élaborées sur les modes de calcul usant des premières notions du calcul infinitésimal (cf. par exemple le livre de A. Arnaud *Nouveaux éléments de géométrie* publié en 1790). L'évolution inverse, récente, concernant la topologie (cf. *Le retournement de la sphère*) n'a pas eu d'incidence sur l'enseignement de ces objets « anciens ».

Une étude historique, pour laquelle nous ne sommes pas armée, éclairerait sans doute le phénomène d'obsolescence signalé plus haut qui accompagne dans l'enseignement actuel — en France tout au moins — une réduction considérable de la part de la *mathématisation* dans les objectifs de l'enseignement mathématique, y compris de l'enseignement obligatoire (en particulier premier cycle du second degré).

I. Les mesures spatiales : un champ conceptuel complexe, où les questions multiplicatives jouent un rôle déterminant

1. Les travaux de psychologie cognitive aussi bien que les études sur les acquisitions scolaires convergent pour confirmer les difficultés de ces notions pour l'enfant et l'élève. Ainsi les recherches sur les conservations spatiales montrent que si les premiers acquis sont relativement précoces (les premières conservations de la longueur, de la surface comme « étendue », apparaissent vers 7-8 ans) l'acquisition de la conservation pour l'ensemble des mesures spatiales est un *processus de longue durée* qui se poursuit pendant l'adolescence.

Si l'on se reporte aux recherches de Piaget et Inhelder sur l'espace (1948), on voit que l'acquisition des conservations sur le volume ne commence guère avant le début des opérations formelles. Ultérieurement les travaux de Vinh Bang et Lunzer (1965) portant sur les conservations de périmètres et surfaces ont mis en évidence un point central : les difficultés rencontrées par les enfants pour passer d'opérations de compensation « additive » — suffisantes pour assurer des réponses de conservation des longueurs — aux compensations « multiplicatives » — nécessaires pour travailler sur la conservation des surfaces et volumes. La coordination multiplicative est en effet une opération cognitive complexe : il faut attendre la fin de l'enseignement élémentaire pour que les enfants réussissent un ensemble d'épreuves mettant en jeu le produit cartésien (construction d'ensembles, produit « simple » de type ExF et ExE, mise en rapport de deux produits, négation de conjonction de propriétés) (Rogalski ; Maury et Rogalski, 1970).

Les « bilans » effectués à la fin de l'enseignement élémentaire montrent, par une autre approche, les difficultés des acquisitions scolaires correspondant à ces notions : on peut citer l'ampleur des échecs à la fin du CM_2 pour les calculs de surface et de périmètre de rectangles et pour les changements d'unité (BICAMEL, Lille, 1979). Les recherches sur les opérations multiplicatives (Vergnaud et al., 1978, 1980) font apparaître non seulement des échecs massifs pour le calcul du volume du parallélépipède rectangle mais l'utilisation de procédures de type « périmétrique » (l'élève exprime le volume par une combinaison linéaire de longueurs), de type « surface », ou même « mixtes ». De même Hirstein (Hirstein et al., 1978) montre la variété des conceptions erronées sur la surface, dont des identifications aux propriétés périmétriques.

2. Ces difficultés renvoient tout particulièrement aux problèmes rencontrés par les enfants et les élèves dans l'acquisition des relations entre les différentes quantités spatiales ; ces relations mettent en œuvre un double processus de différenciation et de coordination : différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord/la surface intérieure ; la surface d'un solide/son volume...) et coordination de ces propriétés de façon non seulement qualitative mais quantitative, aboutissant aux « équations aux dimensions » $S = L \times L$, $V = S \times L = L \times L \times L$ (Rogalski, 1979).

2.a. Appropriation des notions d'« unidimensionalité » de la longueur, et de « bidimensionalité » de la surface

Par appropriation nous entendons l'acquisition de concepts, de représentations, de procédures assez stables et cohérentes pour être disponibles et mises en pratique dans la résolution des divers problèmes qui impliquent les notions concernées. La notion centrale sur laquelle porte le travail expérimental rapporté ci-dessous, qui s'intègre dans un ensemble plus large, est celle de dimensionalité des mesures : « unidimensionalité » de la longueur, « bidimensionalité » de la surface[1].

Les dimensionalités relatives se traduisent comme on sait par les « équations aux dimensions », dont le rôle conceptuel est souvent mieux reconnu dans l'enseignement de la physique que dans celui des mathématiques... Elles se traduisent aussi par les propriétés de *bilinéarité* de la mesure de surface par rapport aux longueurs, du volume par rapport à la surface et la longueur, et la *trilinéarité* de la mesure de volume par rapport aux longueurs. On voit ici se recouper le champ conceptuel des mesures spatiales et le champ conceptuel des problèmes multiplicatifs (cf. Vergnaud et al., 1979, 1980).

2.b. L'invariant dimensionnel des similitudes

Un des apports très productifs de l'étude des acquisitions de différentes quantités a été celui, conduit par Piaget, de

1. Schématiquement : la droite est un espace vectoriel sur R de dimension 1, et toute courbe « assez regulière » lui est localement homéomorphe ; de même une surface est localement homéomorphe à un « bon » domaine de R^2 (surface des solides), l'espace ambiant étant représenté par R^3. Ce sont les notions de variété de dimension 1 et de dimension 2 qui en donnent une mathématisation rigoureuse. Cette représentation de la dimension est extrêmement schématique, et nous n'aborderons pas les questions de validité qui sont par ailleurs centrales dans l'enseignement ultérieur des mesures. Les questions de « dimensions des ensembles », et de dimensions des mesures ont été au cœur des recherches autour des années 1900 : H. Gispert (1980) cite ainsi un article de Rieman (de 1854, publié en 1867) : « sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie » : « le concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs spatiales, n'a jamais été l'objet d'aucune étude », et H. Gispert enchaine « cette étude qui fut lancée par Cantor devait occuper régulièrement pendant cinquante ans un grand nombre de mathématiciens parmi les plus importants ». La notion « d'objet fractal » relance aujourd'hui des recherches sur ces questions de dimensions. L'objet mathématique est donc loin d'être simple.

l'analyse de la construction d'invariants opératoires, par les épreuves dites de « conservation » ; les transformations considérées dans ces études sur le développement cognitif sont le plus souvent des transformations des configurations spatiales d'objets physiques (conservation de la masse, du volume), plus rarement ce sont des transformations géométriques, portant directement sur des représentations (conservation de la surface). D'une manière analogue, nous avons abordé le travail sur l'appropriation de la « dimensionalité » des longueurs et surfaces par l'étude d'invariants de certaines transformations. Les transformations considérées sont des *similitudes*[2] (qui forment bien un groupe), qui agissent de façon différentielle sur les trois mesures : à une similitude de rapport r on peut associer un invariant propre à chaque mesure (mais invariant pour toute figure considérée), c'est le rapport de la mesure transformée à la mesure de la figure initiale.

— Pour la longueur cet invariant est r (rapport de similitude).

— Pour la surface l'invariant est r^2

— Pour le volume l'invariant est r^3

(Cette propriété équivaut à l'application des équations aux dimensions).

Comment se manifeste l'émergence, et la discrimination des ces invariants spécifiques de chaque mesure, l'invariance des mesures par isométrie étant supposée acquise par les élèves des niveaux considérés fin du CM_1 et au-delà. Quelles difficultés rencontrent-elles ? Quelles interventions didactiques peut-on envisager pour dépasser ces difficultés ? Telles sont des questions générales qui se posent sur cette notion de « dimensionalité » qui ne fait pas l'objet d'un enseignement explicite, en mathématique au moins (en physique, au moins à certains niveaux scolaires les questions de

2. Ou des homothéties de centre donné : nous ne discuterons pas de la pertinence d'une représentation affine ou vectorielle de l'espace par rapport au problème étudié. Les invariants considérés sont en tout état de cause les mêmes. On aurait pu considérer l'invariant rationnel suivant le rapport des mesures $\left(\frac{\text{mes } S(A)}{\text{mes } S(B)} = \frac{\text{mes } A}{\text{mes } B}\right)$ pour toutes similitudes S ; mais cet invariant plus proche des invariants classiques n'est pas différentiel.

dimensions sont explicitées, mais à ces niveaux la surface n'est pas davantage un objet d'enseignement de la physique que des mathématiques).

Une question plus spécifique concerne l'accès au domaine multiplicatif : quel passage peut-on repérer entre les opérations de caractère additif au moins partiellement maîtrisées par l'enfant (par exemple les pavages) et l'appropriation des notions de dimensions ?

2.c Rapports entre l'espace, les structures multiplicatives et les mesures, quelques questions centrales :

Quelle est la *disponibilité* des représentations que peut avoir l'enfant d'opérations de « pavage », qui permettent justement les opérations de caractère additif ; quelle *mobilisation* de ces représentations peut-on provoquer ?

Quel est le *domaine de validité* du passage des propriétés additives à l'invariant multiplicatif lié à la dimension ?

Sur quel(s) *modes(s) opératoire(s)* l'élève peut-il traiter les mesures de longueur et de surface ? Quelle interaction y a-t-il entre modes opératoires et opérations cognitives ?
Précisons ces questions :

Disponibilité et mobilisation des représentations spatiales.

Pour dénombrer, par exemple, combien de « petits » carrés (ou triangles) sont contenus dans le carré (ou triangle) de côtés doubles, ou triples, l'enfant doit se représenter — ou représenter graphiquement — le « pavage » de la « grande » figure par les petites. Cette opération peut-elle se faire « spontanément », suscitée par la simple question de dénombrement, c'est-à-dire est-elle immédiatement disponible — ou doit-elle être suscitée par la donnée d'un exemple, ou de plusieurs, et lesquels ? Dans quelle mesure et quelles conditions la mobilisation des représentations a-t-elle lieu ?

Domaine de validité

Les quantités spatiales, comme concepts, doivent concerner une large classe d'objets. Ainsi, si l'on veut parler de « la mesure de longueur », il faut pouvoir parler et opérer sur la longueur du carré, la longueur du cercle, avec des propriétés communes, invariantes avec les figures.

De même, parler de *la* surface du carré, *la* surface du triangle, *la* mesure des surfaces, suppose que pour tous les carrés d'une part, tous les triangles d'autre part, des opérations communes sont possibles, et que de plus il s'agit bien de la même quantité, appliquée à des figures différentes, quantité caractérisée par des propriétés valides sur l'un *et* l'autre ensemble de figures dont les disques ou d'autres figures non pavables. Quelles généralisations opérant à divers niveaux entrent en jeu dans l'extension du domaine de validité au cours de l'appropriation des notions sur les mesures-surfaces ?

Les modes de travail opératoire

En tant que quantités, les longueurs, surfaces et volumes font l'objet de « calculs » au sens large du terme.

Le « calcul » peut être qualitatif : ainsi deux surfaces peuvent être comparées du point de vue de leur « étendue », (si l'une est incluse dans l'autre elle sera « moins étendue », si elles sont isométriques elles sont de « même étendue »...); il peut être semi numérique : une surface obtenue par regroupement de 2 surfaces égales sera « le double » de chaque figure composante ; numérique : après le choix d'une unité géométrique de pavage, on mesure l'aire en nombres d'unités ; après le choix d'une unité physique on calcule l'aire : une table mesure par exemple 1 m^2. Les calculs peuvent être de type algébrique — ou littéral — ainsi la formule de calcul des aires de rectangle $S = a \times b$. Dans ces « calculs » apparaît nécessairement une *formulation* de la quantité, et, dès le calcul numérique, le choix et l'utilisation d'une *unité*.

Les propriétés essentielles des mesures sont-elles pour l'enfant invariantes quand l'expression et/ou l'unité changent ? Par exemple travailler sur la surface comme « quantité à peindre », mesurée par des nombres de pots de peinture, sur la surface comme « quantité de production » mesurée par des masses ou des capacités, sur la surface comme « nombre de cm^2 » mesurée avec une unité en rapport avec l'unité de longueur, met-il en pratique les mêmes opérations cognitives, utilise-t-il les mêmes invariants ?

Il faut remarquer ici que dans l'enseignement élémentaire (parfois dans le cycle d'observation du second degré) un double mode de travail opératoire est l'objet explicite de l'enseignement : avec pour le volume, le « doublet » des mesures de capacité (avec les litres...) et de volume (avec les

m^3). Le seul indice d'un doublet analogue pour la surface est l'introduction des mesures agraires (en ares...) par rapport aux mesures d'aires (en m^2...). Par ailleurs, pour la longueur, la représentation de la distance parcourue (longueur) par le temps mis (durée) est présente précocement chez l'enfant, et fréquente dans la langue courante (« c'est à cinq minutes d'ici... »).

II. Méthodologie et dispositif expérimental

1. Les questions que nous soulevons peuvent être abordées par plusieurs voies de recherches. Les problématiques et les méthodes y sont relativement spécifiques de la manière dont elles prennent en compte les « agents » dont l'interaction détermine le processus d'enseignement. Ces « agents » sont les enseignants (et l'institution scolaire), les élèves, et le contenu enseigné (conceptuel et mathématique). Ainsi que nous l'avons explicité plus haut, l'étude du fonctionnement concret de l'enseignement, la construction et l'analyse de situations didactiques, comportent une interrogation précise sur les représentations des élèves.

Les expériences rapportées ci-dessous concernent ainsi l'appropriation par les enfants et adolescents de ces notions liées à la dimensionalité. Leur construction, comme l'interprétation des résultats, s'appuie sur les premières analyses du contenu (Rogalski, 1979). Les évolutions constatées le long du cursus scolaire sont rapportées au contenu général de l'enseignement des mathématiques dans les différents niveaux. La prise en compte conceptuelle et la manipulation opératoire du caractère de produit des mesures de surfaces et volumes sont liées au grand problème suivant : le passage des structures additives (dont les premiers schèmes sont très précoces) aux structures multiplicatives. C'est ce point pour lequel nous observerons plus précisément les interactions entre les représentations de l'enfant élève et les caractères de l'enseignement.

2. Pour l'étude des représentations des élèves, nous avons choisi de commencer par la passation collective de questionnaires. Les réponses à ce questionnaire sont des réponses numériques simples, et ne comportent pas d'autre explication écrite de la part des élèves. Plusieurs raisons nous on conduit à ce choix comme première étape d'étude didactique de ces problèmes. Tout d'abord, nous voulions analyser des réponses à un ensemble assez complexe de questions pour repérer les régularités dans les relations entre les réponses, de façon à cerner — pour cette question de dimensionalité — la structuration du champ conceptuel des mesures. Ensuite nous voulions en suivre l'évolution, sur une durée en rapport avec la complexité prévue : ces deux exigences conduisaient à l'interrogation d'un nombre important de sujets.

Par ailleurs, nous voulions contrôler l'insertion temporelle de ces questions posées aux élèves dans le déroulement de l'enseignement qu'ils suivaient ; nous voulions éviter également les interférences extérieures entre élèves ou entre élèves et maître mal contrôlables et non analysables : une passation collective permettait de répondre à ces deux objectifs.

3. Trois questionnaires ont été utilisés : l'un sur la longueur — noté L dans la suite — les deux autres sur la surface notés SA et SN respectivement. Un court questionnaire a été également utilisé pour situer notre population par rapport aux difficultés concernant le volume (G. Ricco, 1982).

3.a. Questionnaire L sur la mesure linéaire

L'étude faite sur le caractère « unidimensionnel » de la mesure des longueurs a porté sur deux types de situations-problèmes. Dans un premier groupe les données comme les questions sont « arithmétisées », dans un second groupe elles sont posées sous une forme « géométrisée ».

La figure ci-contre reproduit l'une des quatre questions « arithmétisées » (à 2 items) et la question « géométrisée » (à 4 items) avec les réponses d'un élève de 6^e^.

Les quatre questions « arithmétisées » étaient posées avec cette présentation ; les périmètres initiaux étaient exprimés soit en *centimètres* (questions 1 et 3), soit en *temps de parcours* (question 2) ou en *nombre de ficelles « unités »*. Les rapports entre la figure initiale et la figure sur laquelle

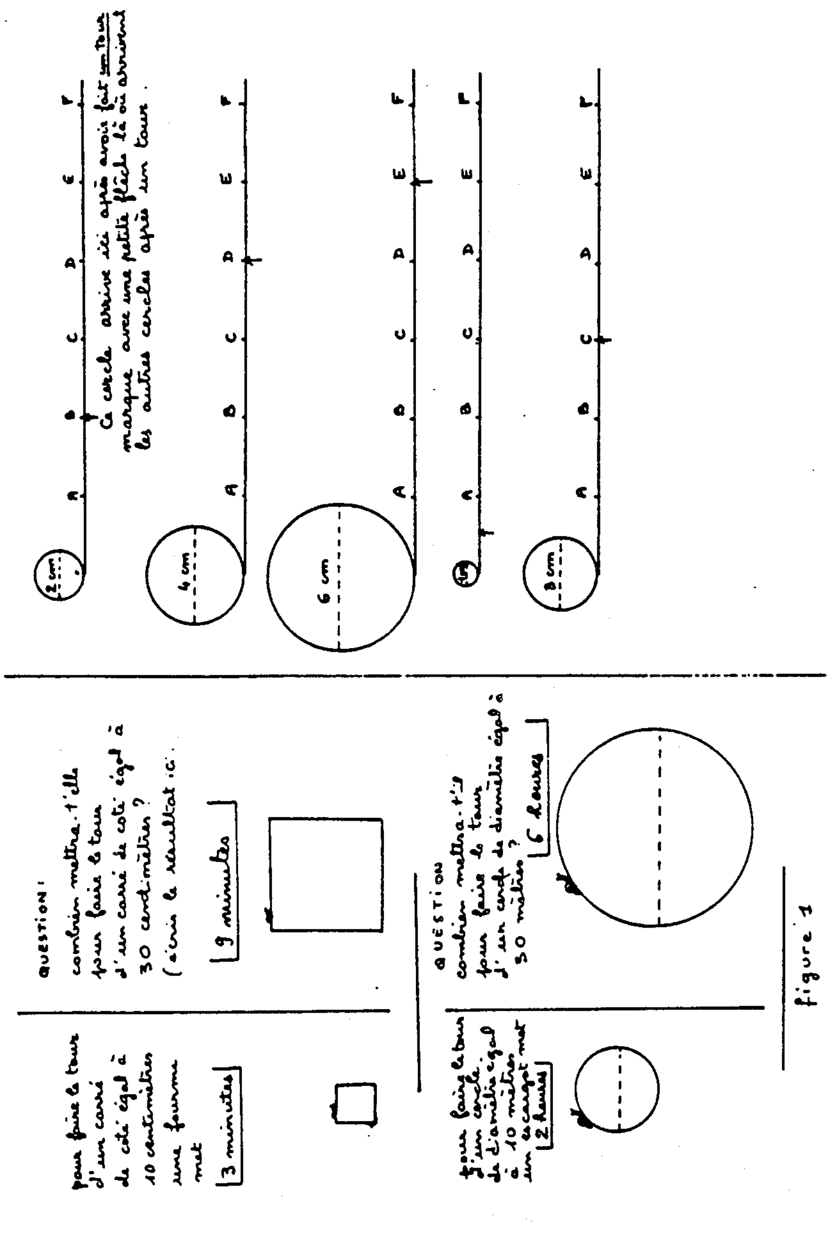

2 cm
A B C D E F
Ce cercle arrive ici après avoir fait son tour
marque avec une petite flèche là où arrivent
les autres cercles après un tour.
4 cm
6 cm
1 cm
3 cm
pour faire le tour d'un carré de côté égal à 10 centimètres une fourmi met
3 minutes
QUESTION: combien mettra-t-elle pour faire le tour d'un carré de côté égal à 30 centimètres ?
(écris le résultat ici
9 minutes
pour faire le tour d'un cercle de diamètre égal à 10 mètres un escargot met
2 heures
QUESTION combien mettra-t-il pour faire le tour d'un cercle de diamètre égal à 50 mètres ?
6 heures
figure 1

Figure 1

porte la question étaient des rapports simples : 2 (question 1), 3 (questions 2 et 4) et $\frac{1}{2}$ (question 3).

Nous n'avons pas croisé systématiquement les « modes opératoires » (cm, temps, nombre de ficelles) avec les rapports (2, 3, $\frac{1}{2}$), un sondage ayant montré qu'au niveau scolaire où était posé ce questionnaire, avec des données permettant une lecture immédiate de ces rapports, double et moitié (2 – $\frac{1}{2}$) fonctionnaient de manière analogue, ainsi que les rapports numériques entiers petits.

3.b. Questionnaire SA et SN sur la mesure-surface

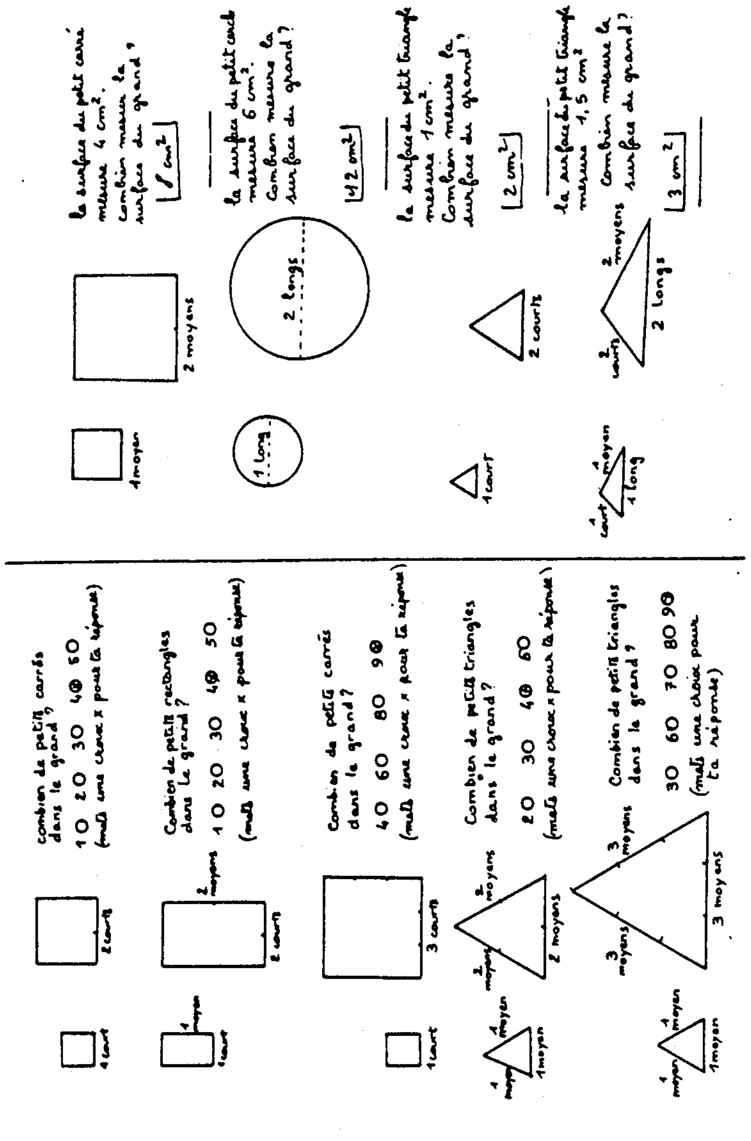
Après une phase de familiarisation avec les termes utilisés et les modes de réponses les deux questionnaires comportent quatre phases centrales. La figure 2 ci-contre reproduit le début de la phase de familiarisation, la phase 1 et la phase 4 dans le questionnaire SA, avec les réponses de l'élève de 6ᵉ

Questionnaire SA :

La phase 1 est dénommée par la suite « pavage spontané ». On donne une petite figure construite à partir des trois segments unitaires définis dans la phase de familiarisation comme « court », « moyen », « long ». Les figures semblables sont définies par rapport à ces mêmes segments. Les rapports sont 2 ou 3 (cf. figure 2). Les enfants ont à choisir une réponse parmi 4 ou 5.

La phase 2 est dénommé par la suite « surface-peinture ». Les dessins des couples de figures sont analogues à ceux reproduits sur le schéma 2 (phase 4). Les questions posées sont du modèle suivant : « il faut 1 pot de peinture verte pour peindre le petit carré. Combien faut-il de pots pour peindre le grand ? (La couleur change avec la figure). Les enfants ont à choisir entre 5 réponses (1 à 5).

La phase 3 est désignée par phase de « pavage avec exemple ». Les figures sont celles de la phase 1, dans ce même ordre. Pour la première figure le pavage est figuré en pointillé, les petits carrés marqués d'une croix, avec le commentaire « il y a 4 petits carrés dans le grand ; une croix montre l'endroit où ils sont ». Les questions sont ensuite du modèle « mets des croix pour montrer où mettre les petits rectangles



combien de petits carrés dans le grand ?
10 20 30 40 50
(mets une croix x pour ta réponse)
1 court
2 courts
Combien de petits rectangles dans le grand ?
10 20 30 40 50
(mets une croix x pour ta réponse)
1 moyen
1 court
2 moyens
2 courts
Combien de petits carrés dans le grand ?
40 60 80 90
(mets une croix x pour ta réponse)
1 court
3 courts
Combien de petits triangles dans le grand ?
20 30 40 60
(mets une croix x pour ta réponse)
1 moyen
2 moyens
Combien de petits triangles dans le grand ?
30 60 70 80 90
(mets une croix pour ta réponse)
1 moyen
3 moyens
La surface du petit carré mesure 4 cm². Combien mesure la surface du grand ?
8 cm²
1 moyen
2 moyens
La surface du petit cercle mesure 6 cm². Combien mesure la surface du grand ?
12 cm²
1 long
2 longs
La surface du petit triangle mesure 1 cm². Combien mesure la surface du grand ?
2 cm²
1 court
2 courts
La surface du petit triangle mesure 1,5 cm². Combien mesure la surface du grand ?
3 cm²
1 court
1 moyen
1 long
2 courts
2 moyens
2 longs

Figure 2

dans le grand. Combien y en a-t-il ?

La phase 4 est désignée par « surface-peinture ». La situation de la phase 2 est reprise, mais on donne la surface des petites figures en cm^2 : « la surface du petit carré mesure 4 cm^2. Combien mesure la surface du grand ? » La réponse est ouverte.

Une phase est introduite entre les phases 2 et 3 pour vérifier si l'ordre sur les quantités de peinture pour recouvrir des figures est bien compatible avec l'ordre de l'« étendue » de ces figures (lequel est sans ambiguité sur le plan perceptif).

Questionnaire SN :

Phase 1. Parmi les figures il y a le parallélogramme, et la question « combien de petites figures dans la grande » est présentée comme commune à toutes les figures qui suivent.

Phase 2. Parmi les figures on adjoint un parallélogramme. Le nombre initial de pots de peinture est 4 pour le carré, 5 pour le parallélogramme, 6 pour le disque, 1 pour le triangle équilatéral, 2 pour le triangle « obtus ». Les réponses sont ouvertes.

Phase 3. Deux exemples de dénombrement et de pavage sont données : carré (rapport 2) et triangle équilatéral (rapport 3). Le pavage est demandé pour le carré (rapport 3), le parallélogramme (rapport 2), les triangles, équilatéral (rapport 2) et « obtus » (rapports 2 et 3).

Phase 4. Construite comme la phase 2. Les mesures en cm^2 des figures sont égales au nombre des pots de peinture.

Deux phases supplémentaires sont introduites :

— une phase d'*utilisation des* cm^2 pour quantifier des surfaces non pavables en carrés de 1×1.

— une phase généralisant des questions de la phase 4 mais avec un rapport 3. Cf. la figure 3. (Les réponses sont celles d'un élève de 6e).

3.c. *Organisation comparée des phases centrales*

Le tableau S ci-dessous résume l'organisation des quatre phases centrales des questionnaires SA et SN avec les notations suivantes : nous notons F_n l'item où la figure F est transformée avec une similitude de rapport n. Les rapports utilisés sont 2 ou 3. Les figures sont : le rectangle R ; le

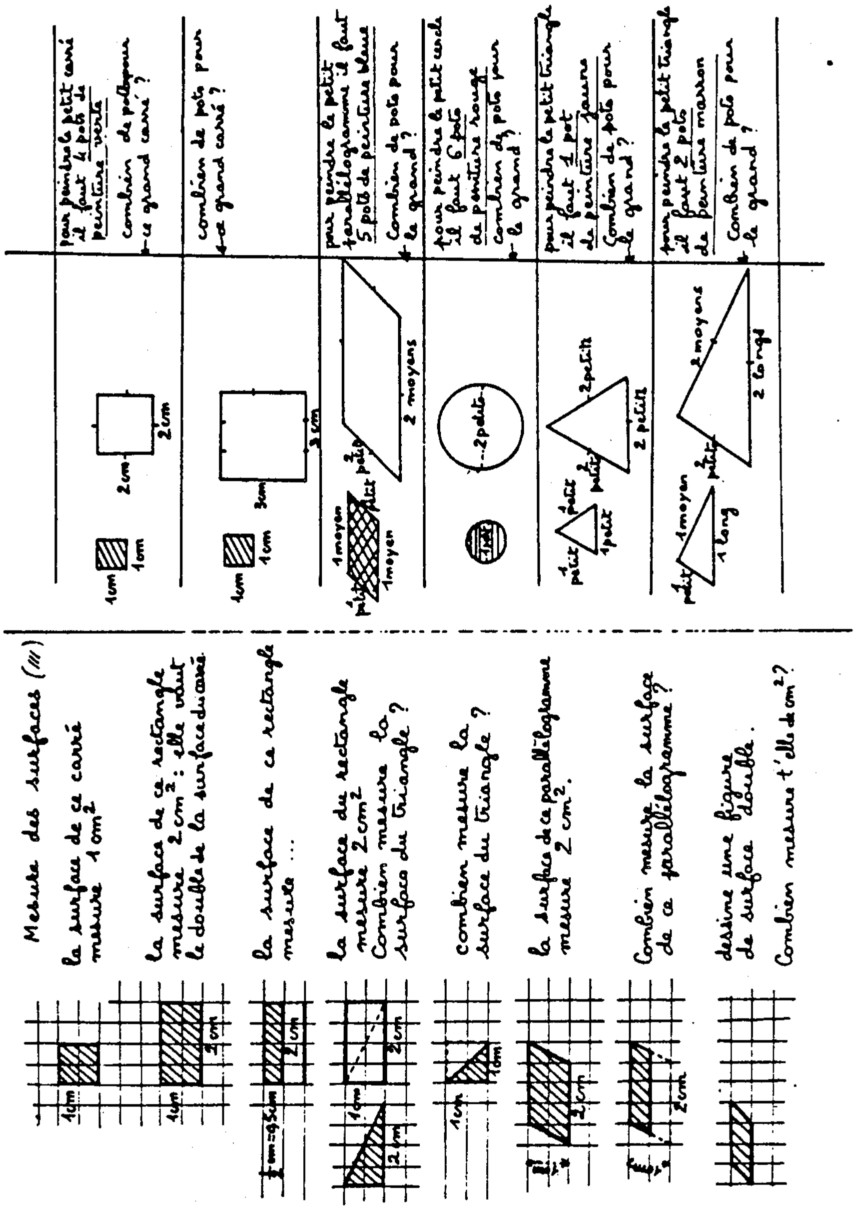

Mesure des surfaces (III)
la surface de ce carré mesure 1 cm²
la surface de ce rectangle mesure 2 cm² : elle vaut le double de la surface du carré.
la surface de ce rectangle mesure ...
la surface du rectangle mesure 2 cm²
Combien mesure la surface du triangle ?
combien mesure la surface du triangle ?
la surface de ce parallélogramme mesure 2 cm².
Combien mesure la surface de ce parallélogramme ?
dessine une figure de surface double.
Combien mesure t'elle de cm² ?
1 cm
2 cm
3 cm
1 moyen
2 moyens
1 petit
2 petits
1 long
2 longs
pour peindre le petit carré il faut 4 pots de peinture verte
combien de pots pour ce grand carré ?
combien de pots pour ce grand carré ?
pour peindre le petit parallélogramme il faut 5 pots de peinture bleue
Combien de pots pour le grand ?
pour peindre le petit cercle il faut 6 pots de peinture rouge
combien de pots pour le grand ?
pour peindre le petit triangle il faut 1 pot de peinture jaune
Combien de pots pour le grand ?
pour peindre le petit triangle il faut 2 pots de peinture marron
Combien de pots pour le grand ?

Figure 3

carré C ; le triangle équilatéral T_e ; un triangle « obtus » (non isocèle) T_o ; le parallélogramme P ; le disque D.

	phase préliminaire	de familiarisation
1ère phase	C_2 R_2 C_3 Te_2 Te_3	C_2 P_2 C_3 Te_2 Te_3 P_3
2ème phase	C_2 D_2 Te_2 To_2	C_2 C_3 P_2 D_2 Te_2 To_2
3ème phase	exemple donné : C_2 R_2 C_3 Te_2 Te_3	exemples donnés : C_2 et Te_3 C_3 P_2 Te_2 To_2 To_3
4ème phase	C_2 D_2 Te_2 To_2	C_2 P_2 D_2 Te_2 To_2

Tableau S

Les objectifs des différentes phases

Les phases 1 et 3 ont pour but d'apprécier la *disponibilité* d'une représentation de pavage d'une figure par une figure semblable et la *mobilisation* possible de cette représentation par la donnée d'un (ou deux) modèle(s).

Les couples de phases 1-2 et 3-4 concernent l'étude du passage d'une représentation qui permet le décompte additif d'« unités-formes » au calcul de la mesure d'une surface semblable à une autre.

La comparaison des phases 2 et 4 a pour but d'étudier l'effet du mode opératoire choisi : un mode « unidimensionnel » (représenté ici par un nombre de pots de peinture nécessaires pour peindre la surface) et un mode « bidimensionnel » (ici l'unité métrique cm^2).

Les interactions des opérations de pavage et de mesure de surface avec les caractéristiques des figures sont étudiées dans les différentes phases pour explorer le domaine de validité des opérations et le domaine de validité de la « dimensionalité » de la mesure-surface.

Remarques

Pour éviter des interférences, non contrôlables à cette étape de la recherche, entre les représentations des élèves, les opérations qu'ils peuvent mettre en œuvre d'une part, la manipulation des formules de calcul des surfaces et les opérations arithmétiques proprement dites d'autre part, nous avons construit des questions où la numérisation soit la plus «légère» possible. Les rapports de similitude sont très simples ; $r = 2$ et $r = 3$; ils permettent de représenter ensemble les figures initiales et transformées ; ils permettent un décompte additif ou multiplicatif rapide ($2 + 2$ ou 2×2 ou $1 + 3$, 3×3 ou $1 + 3 + 6$) ; pour les calculs de surface ils mettent en œuvre des multiplications «simples» : $\times$ 4 et $\times$ 9...

Les longueurs des côtés des figures (ou les diamètres) ne font pas intervenir de données numériques[3]. Pour chaque couple «figure initiale/figure transformée», les dessins de la figure initiale font intervenir plusieurs unités. Ce sont des segments qualifiés de «petit», «court», «moyen», «long» introduits dans la phase de familiarisation. Cette désignation n'a pas posé de problèmes aux enfants. Par ailleurs les données numériques (nombre de pots de peinture ou surface en cm^2) sont simples. Enfin, par rapport à la mesure exprimée en cm^2 les figures sont représentées en «vraie grandeur» (aux approximations près du tracé matériel...).

3.d Plan d'expérience

Les questionnaires L et SA ont été passés par 116 élèves de fin de CM_1 à la fin de 5ème.

La comparaison des réponses des mêmes sujets permet une ét .de des relations entre l'acquisition de la linéarité de la mesure de longueur et celle de la bidimensionnalité de la mesure de surface.

Le questionnaire SA a été par ailleurs passé par 74 élèves de fin de 6ème à fin de 4ème (avec un sondage en 3ème).

La comparaison des réponses au questionnairte SA données par des élèves de 6ème et 5ème d'origines scolaires différentes apporte des éléments d'information sur la fiabilité des résultats observés.

3. Nous voulions éviter en particulier l'usage de formules de calcul qui auraient nécessité une organisation relativement complexe d'opérations : calcul de S1, calcul de S2, calcul du quotient S2/S1. Cette complexité rend plus difficile de dégager l'invariant proprement dit.

Le questionnaire SN a été par ailleurs passé par 80 élèves de fin de 6ème à fin de quatrième issus des mêmes classes que SA[4].

La comparaison des réponses aux questionnaires SA et SN vise à analyser plusieurs éléments, dont les suivants:
i) dans le questionnaire SA le fait de ne pas proposer d'exemple de pavage de triangle peut accentuer la différence de traitement entre carré et triangle dans les phases 3 et 4. Le questionnaire SN comporte dans sa phase 3 la donnée supplémentaire du pavage du triangle équilatéral pour apprécier ce rôle de l'exemple (comparaison de phases 3 de SA et SN);
ii) La comparaison des phases 4 de SA et SN vise à apprécier le niveau de «résistance» dans l'utilisation du cm^2 comme «mesurant» puisque dans SN une phase intermédiaire (située entre celle du pavage et celle de la mesure en cm^2) fait utiliser le cm^2 comme «mesurant» de figures simples.

4.a Conditions de production des réponses des élèves

Les questionnaires présentés en classe se situent «hors contexte» par rapport à l'enseignement des notions concernées, dans le sens suivant: ils sont passés à une période de l'année où l'enseignement sur les longueurs, surfaces et volumes est terminé (quand il est «au programme» de l'année). Le statut du travail est précisé aux élèves: l'objectif est «une recherche pour connaître les difficultés des élèves sur les questions de longueurs et surfaces, et pour savoir à partir de quand elles sont toutes résolues». (La recherche apparaît bien comme concernant l'expérimentateur). Aucun «feedback» ne vient après les réponses; aucune mise en relation des différentes questions n'est explicitement demandée, et rien dans la situation de questionnement n'est suscité. Aucun temps limite n'est fixé (sinon, implicitement, la fin de l'«heure de maths» — largement suffisante pour tous les élèves) et aucune incitation n'est faite ni à «prendre son

4. A l'exception d'une classe de 5ème dont tous les élèves ont passé SN, et qui avait travaillé pendant l'année sur une séquence didactique sur le volume. Les effets différentiels ne sont pas analysés ici, mais ils rendent compte, nous semble-t-il, d'une «bosse» dans l'évolution des réussites à SN.

temps», ni à répondre «vite»[5]. On peut considérer qu'il n'y a pas de «contrat didactique» actuel (l'expérimentateur étant étranger à la classe).

La situation-problème constituée par un tel questionnaire a des caractères dont on doit tenir compte dans l'analyse des résultats. Les tâches y sont présentées de façon relativement indépendantes : la cohérence des réponses à l'intérieur d'une même phase, ou concernant un même objet dans plusieurs phases différentes ne fait pas l'objet de questionnement. Aucun moyen de «tester» ses réponses n'est présenté au sujet, puisque celles-ci ne sont pas fournies en fonction d'un but opératoire qui serait clairement atteint ou non. La contradiction éventuelle de réponses ne peut jouer de rôle producteur de nouvelles réponses que si elle est spontanément consciente pour le sujet.

L'analyse des résultats, leur interprétation ne peuvent donc être faites en terme de «capacité» ou de «compétence» des élèves : elles ne peuvent porter que sur la disponibilité et l'opérationalité immédiate des représentations ou des opérations.

Néanmoins les comparaisons, qui sont faites à condition de production constante, peuvent être interprétées en termes d'évolution, de domaine de validité, d'interaction...

D'autre part, les réponses produites dans une telle situation «ouverte» (sans feedback) nous semblent pouvoir être rapprochées de celles qui interviennent lorsque les mêmes questions sont insérées dans un problème visant un autre objectif.

Enfin rappelons que nous nous attachons à l'étude de *l'appropriation* de notions par l'enfant ou l'adolescent, c'est-à-dire des acquisitions assez stables et cohérentes pour être disponibles et opérationnelles dans la résolution de problèmes divers ; c'est dans cette perspective que se situent nos analyses et nos hypothèses de conclusion.

5. La variable temporelle interagit très certainement avec les opérations cognitives et elle fait partie intégrante des éléments d'analyse du processus didactique, mais un sondage, rapide, a été fait entre le temps mis à répondre (très variable) et la «qualité» d'ensemble des réponses, qui n'a fait apparaître aucune relation régulière : nous n'avons donc pas traité cette variable temporelle dans notre analyse.

4.b Statut du questionnaire par rapport au contenu de l'enseignement des mesures spatiales

Schématiquement, on peut dire que l'organisation temporelle de l'enseignement donné en fin de scolarité du premier degré et au début du second degré est le suivant : à partir de procédure de pavage « exact » de rectangles par des « pavés-unités » (le plus souvent des carrés, et même des cm^2) on conduit les élèves au calcul de l'aire des rectangles pour des mesures linéaires entières (avec l'unité linéaire ad hoc) avec le cas particulier de la mesure du carré ; on passe ensuite au calcul de l'aire du triangle rectangle (par partage du rectangle), du triangle quelconque (comme réunion de deux triangles rectangles) du parallélogramme, enfin du trapèze. Si des modifications d'ordre peuvent avoir lieu, elles laissent invariant le fait que seule l'additivité est utilisée, que l'encadrement n'est présenté que pour des domaines à frontière partiellement curviligne, et que les notions d'affinement de pavage sont rarissimes, toute notion de continuité étant actuellement exclue[6].

On fournit enfin à l'élève la formule du calcul de l'aire du disque. La combinatoire des formules permet — par additivité — une extension à des figures composées, ce qui constitue une part importante des exercices proposés dans les manuels.

Ce sont ces figures de base, à propos desquelles intervient l'enseignement, que nous avons prises comme « objet » des opérations cognitives étudiées ici.

Certes, il pourrait sembler qu'une approche du concept de la bidimensionalité de la mesure-surface à partir des seuls « pavés » rectangulaires soit théoriquement suffisante. En effet c'est à partir de la mesure du rectangle que se construit la mesure des parties mesurables du plan. C'est un abord qui pourrait être productif pour l'analyse de l'acquisition de cette notion de « dimensionalité »[7] mais les rapports à l'enseignement seraient beaucoup plus complexes. En effet sur

6. De ce point de vue, l'évolution des 19ème et 20ème siècles a modifié l'objet d'enseignement.

7. C'est cette thèse quant à l'enseignement des mesures qui est argumentée par Lebesgue dans ses interventions sur la mesure des grandeurs.

le plan des notions en jeu, on peut schématiser la notion de mesure de surface comme coordonnant trois domaines cognitifs: des opérations additives (réunions, partages entiers...), des opérations « multiplicatives » (affinements de pavage...) et des opérations liées à la continuité et au « passage à la limite ». Ce troisième domaine est à l'heure actuelle totalement absent de l'enseignement aux niveaux que nous considérons: la continuité n'est ni enseignée ès qualités, ni utilisée comme un préconstruit. Nous maîtriserions d'autant plus mal les rapports du questionnaire à l'enseignement que peu de recherches sur le développement cognitif de l'enfant et du jeune adolescent concernent aujourd'hui les notions liées à la continuité: nous nous sommes donc placée dans un cadre a priori compatible avec les contrats didactiques antérieurs, et utilisant les connaissances didactiques déjà acquises.

4.c Les sujets et leur « représentativité »

Les élèves interrogés étaient des élèves de CM_1 et CM_2 (école primaire de la proche banlieue de Paris), de 6^e, 5^e et 4^e (CES de la proche banlieue de Paris, et Orléans).*

Nous estimons pouvoir rapporter les résultats observés et les analyses faites à un certain nombre de caractères « invariants » dans l'actuel enseignement, tels qu'ils se manifestent par exemple par l'organisation des leçons sur la surface que proposent les manuels scolaires.

Nous faisons l'hypothèse de l'invariance des obstacles conceptuels essentiels, des évolutions et des réorganisations de notions, en raison de l'importance des contraintes propres à l'espace « physique » dans lequel se déroulent les activités humaines, et des régularités existant dans le développement cognitif.

Modulons: cette invariance, relative, s'applique dans un cadre culturel donné, avec un certain fonctionnement social dans lequel s'inscrit l'institution scolaire elle-même. Le franchissement, ou le non-franchissement d'obstacles

* Nous remercions les enseignants et les directeurs de l'Ecole Primaire du CES de Condorcet à Maisons-Alfort ainsi que les enseignants et le principal du CES Joliot Curie à Orléans.

conceptuels, le déroulement concret du processus d'appropriation des notions essentielles sur les mesures spatiales peuvent évidemment faire intervenir des déterminants sociaux et/ou individuels. On peut en voir certains effets rapportés par Mitchelmore (1980) sur les différences interculturelles concernant la représentation plane de solides tridimensionnels, ou dans le travail de K. Yokochi (1980) qui rapporte des résultats sur la géométrie au jardin d'enfants surprenants pour nous.

Ces modulations faites, il faut remarquer que la très grande fiabilité des expériences « piagétiennes » sur les conservations et le développement cognitif en général comme la régularité des difficultés rapportées par les maîtres, convergent pour confirmer l'existence d'invariants. Anticipant sur les résultats, nous pouvons dire que la comparaison de nos deux populations de 6^e et 5^e issus d'écoles distinctes nous conduit à faire l'hypothèse d'une stabilité globale à l'intérieur du système scolaire français des connaissances et des conduites cognitives générales des élèves en ce qui concerne les mesures spatiales.

III. Bilan des résultats d'ensemble

L'ensemble des réponses portant sur l'effet produit par des similitudes simples sur la mesure de figures familières montre qu'un « modèle linéaire » fonctionne de façon relativement précoce, mais que les élèves rencontrent de très grandes difficultés pour dépasser ce modèle et aller vers un traitement multidimensionnel approprié aux mesures de surface et de volume, même lorsque les caractères multiplicatifs sont directement dérivés du dénombrement additif.

La mise en œuvre du « modèle linéaire » fait elle-même l'objet d'une évolution de longue durée. C'est à la fin du cycle d'observation du second degré (« 7th grade ») seulement que le « modèle linéaire » est disponible pour résoudre des problèmes qui utilisent son application directe.

Parallèlement à son évolution, l'appropriation des concepts dimensionnels relatifs à la surface s'effectue lentement, et de façon incomplète pour beaucoup de sujets. Alors même que l'enseignement sur ces notions est terminé les opérations que l'élève peut conduire sont limitées et très liées au contenu.

Un recours au « modèle linéaire » a lieu lorsque le pavage est complexe (triangles) ou impossible (disque) — ou lorsque le pavage n'est pas demandé au préalable. De plus, une unité de mesure comme le cm^2, qui est pourtant un objet central de l'enseignement sur la mesure des surfaces, apparaît comme singulièrement peu opérationnelle, très mal reliée à la bidimensionalité de la surface, et véhiculant des propriétés de l'unité de mesure linéaire dont elle est composée.

Des points d'ancrage existent néanmoins pour aller vers une appropriation des notions de dimensionalité différentielle des mesures de longueurs et surfaces (et volumes). En effet des figures comme les rectangles et les parallélogrammes sont telles que les opérations qui conduisent au pavage et à la mesure de la surface transformée sont liées au « produit logique » et à la multiplication (numérique). Pour ces figures, les pavages et les évaluations de la mesure de la figure transformée peuvent être largement réussies par les élèves, à condition de les placer devant une situation assez structurée. La très faible évolution observée à propos de ces figures suggère que les situations proposées aux élèves au cours de l'enseignement s'appuient sur des acquis cognitifs mais utilisent peu ces « points d'ancrage » pour la construction d'une connaissance plus élaborée, ni pour l'extension du domaine de validité opératoire de ces acquis.

1. Comparaison globale des opérations sur la longueur et la mesure de surface

Nous effectuons cette comparaison à partir d'un indice brut de réussite pour les questions sur la longueur et sur la surface. Cet indice est le quotient du nombre de réponses exactes sur le nombre d'items. Pour la longueur, les quatre questions sur le roulement sont considérées comme un seul item, réussi si les quatre réponses sont correctes. Il y a ainsi 11 items dont 5 concernant le cercle. Pour la surface les questions initiales sur le carré et le rectangle sont décomptées pour un seul item (les réponses des sujets y sont identiques).

Il y a ainsi 16 items dont 2 concernent le cercle. La figure 4 donne la répartition en pourcentage des sujets selon leurs indices de réussite aux épreuves « longueur » et aux épreuves « surface ».

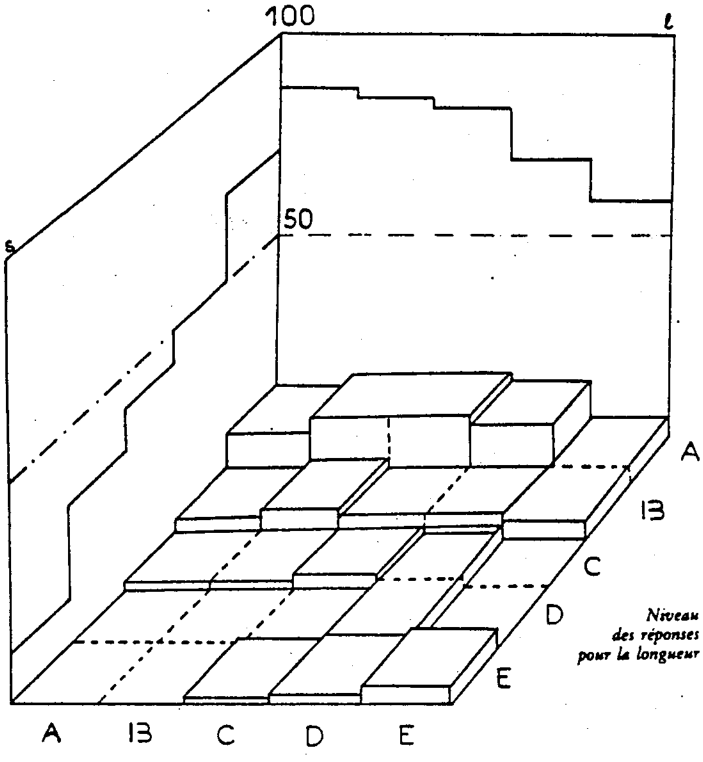


Figure 4
Axe vertical: pourcentage des sujets selon leurs niveaux de réponse pour la longueur et la surface (ensemble des sujets de l'expérience SA, CM1, CM2, 6°, 5°). Plans verticaux: distributions marginales des réponses correctes — pour la longueur *(selon le niveau des réponses pour la surface)* axe 1 — *pour la* surface *(selon le niveau des réponses pour la longueur)* axe s.

(Les sujets sont les 116 sujets ayant passé dans cet ordre les questionnaires L, SA et V). La figure 4 confirme la difficulté des problèmes concernant la mesure de surface par rapport à ceux concernant la longueur. Les sujets pour lesquels il y a inversion (faible) des niveaux de réussites ont manifesté des difficultés non spécifiques aux mesures spatiales. L'allure des distributions marginales montre l'existence d'une relation forte entre les deux épreuves. Globalement il est nécessaire d'avoir une bonne représentation du caractère unidimensionnel de la longueur pour obtenir une réussite moyenne pour la surface, mais c'est loin d'être suffisant.

Le décalage des acquisitions est considérable : la « linéarité » de la longueur se manifeste chez plus de la moitié des élèves en fin de CM_1, alors que moins de la moitié des réponses des élèves en fin de 4ᵉ correspondent à la bilinéarité de la surface pour le mode opératoire, pourtant scolairement familier, du « cm^2 », dans la situation SA.

Pour ce qui concerne l'évolution de la « trilinéarité » du volume, nous renvoyons au travail de G. Ricco sur les élèves de 6ᵉ à 3ᵉ. Au vu de notre sondage, le passage du plan à l'espace semble bien comporter un élément qualitatif spécifique, lié aux représentations.

IV. Acquisition de l'unidimensionalité de la mesure-longueur

Les réponses des enfants et adolescents aux différentes questions concernant la longueur ont trois caractères principaux. Elles montrent l'existence d'acquis précoces sur l'unidimensionalité de la mesure-longueur : l'utilisation d'un « modèle linéaire » pour apprécier le périmètre d'une figure transformée a lieu largement dès le CM_1 et est indifférente aux modes opératoires utilisés (calcul en cm ou m, en temps de parcours, en nombre de ficelles...). On observe également un décalage, faible mais certain, entre les réponses concernant les figures à bord rectiligne (par morceaux) et celles concernant les figures à bord curviligne.

Enfin la fiabilité des réponses correctes évolue en fonction du cursus scolaire, avec une augmentation importante du pourcentage de réponses complètement correctes entre le cours moyen et le cycle d'observation.

1. Réponses correctes et effet du mode opératoire

Pour chacune des questions « arithmétisées », qui comprend un item pour le carré et un item pour le cercle, on peut définir deux indices qui permettent une comparaison rapide des différents modes opératoires :

— le pourcentage moyen de réussites de l'ensemble des sujets, calculé sur l'ensemble des 2 items, et noté T_m ;

— le pourcentage de réussite complète aux deux items, noté T_c.

On calcule également le pourcentage moyen de réussite sur l'ensemble des questions T_m et le pourcentage de réussite complète aux 8 items : T_c.

NIVEAUX	CM1	CM2	6°	5°	TOTAL
Q1 "cm"	72 (56)	69 (53)	86 (82)	89 (83)	77 (63)
Q.2 "temps"	85 (72)	74 (63)	79 (73)	91 (83)	80 (70)
Q 3 "cm"	80 (80)	84 (81)	96 (95)	88 (85)	86 (84)
Q 4 "ficelle"	70 (64)	63 (63)	86 (73)	91 (78)	83 (67)
$Q_1Q_2Q_3Q_4$	77 (26)	77 (29)	86 (55)	89 (67)	83

Tableau I

Pourcentage des réponses correctes aux différentes questions sur les périmètres de figures semblables (cercles et carrés); Le premier pourcentage est calculé sur la moyenne des réponses aux deux figures, celui entre parenthèses correspond aux réponses correctes à la fois pour le cercle et le carré, et — sur l'ensemble — aux réponses intégralement correctes.

Il y a un (léger) effet d'ordre : la première question est, en moyenne, moins bien réussie que les autres, mais il n'y a pas d'effet spécifique du mode opératoire utilisé (pour les élèves des niveaux scolaires concernés).

2. Comparaison des réponses selon le caractère rectiligne (mesure « calculable ») ou curviligne (mesure « à inférer ») de la figure

Pour définir, pour nos sujets, un niveau global d'acquisition de la linéarité, nous les classons en fonction du nombre d'erreurs dans les questions arithmétisées pour le carré et le cercle, et selon leur réussite (R+) ou leur échec (R−) aux questions de « roulement » du cercle.

Le tableau II donne la répartition de l'ensemble des sujets selon leurs réponses.

nb. erreurs carré / nb. erreurs cercle	N = 0	N = 1	N ≥ 2	Total
N = 0	48 (g) / 7	6,1 (g) / 2,6	3.5 (g) / 2.6	57,6 (g) / 12,2
N = 1	5,3 (a) / 2.6	5,3 (a) / -	2,6 (a) / 2,6	13,2 (a) / 5,2
N ≥ 2	- / -	0,9 (a) / 2,6	1,8 (a) / 6,1	2,7 (a) / 8,7
Total	53 / 9,6	12,3 / 5.2	7,9 / 11,3	R+ 73,5 / 26,5 R−

Tableau II

Répartition des sujets (exp. SA, tous sujets) en fonction du nombre des erreurs commises dans les questions arithmétisées sur le carré et sur le cercle; les sujets qui répondent correctement pour la question de « roulement » de cercles sont portés au-dessus de la diagonale de chaque case (réponse R+).

i) Les réponses aux différents items apparaissent fortement corrélées ; la plupart des sujets qui font moins d'une erreur pour une forme, ne font pas deux erreurs pour l'autre ; pour la plupart ce sont les mêmes sujets qui réussissent les épreuves arithmétisées sur le cercle et les épreuves de roulement.

ii) Néanmoins des discordances existent à l'intérieur des questions concernant le cercle : certains enfant répondent correctement aux questions « arithmétisées » et incorrectement aux questions de roulement (cases notées (g)). Nous disons que ces discordances sont de type « géométrique ». D'autres enfants, à l'inverse, donnent des réponses correctes pour le roulement et font des erreurs pour les questions arithmétisées (cases notées (a)). Nous disons que ces discordances sont de type « arithmétique ».

La moitié de ces discordances s'explique par des erreurs arithmétiques, comme $3 \times 3 = 6$ pour (a), ou des calculs inutiles — et erronés — du périmètre du carré (pour (g)).

En tenant compte de ces analyses nous avons classé les sujets selon que la linéarité était acquise pour les tracés rectilignes et curvilignes, qu'elle n'était acquise que pour les tracés rectilignes, ou n'apparaissait pas acquise : la figure 5 donne l'évolution de la répartition des sujets.

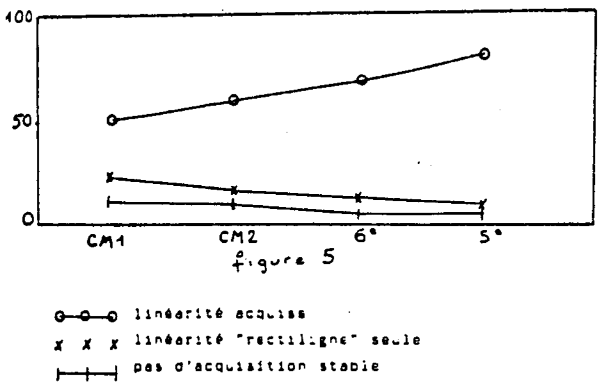


Figure 5

V. Acquisition de la « bidimensionalité » de la mesure-surface

1. Classification des réponses et analyse globale des résultats

1.a Classification des réponses

— Phases 1 et 3, dites de pavages.

Une première classification oppose les réponses correctes (notées +) et les réponses fausses ou absences de réponse. Une réponse correcte est la donnée d'une réponse numérique correcte non contredite par une représentation graphique fausse (Cf. figure 6).

 avec n = 4 est une réponse correcte

 avec n = 4 est une réponse correcte

 avec n = 4 est une réponse fausse

 avec n = 3 est une réponse fausse

Figure 6

Une deuxième classification consiste en 3 classes de réponses numériques : n = 4 (réponse numérique correcte) ; n = 2 (réponse unidimensionnelle) ; n = 3 (réponse spécifique au triangle) et une classe résiduelle X (autres réponses numériques ou pas de réponse) pour le rapport de similitude 2. Pour le rapport de similitude 3 il y a 5 classes de réponses numériques : n = 9 (correcte) ; n = 8 ; n = 7 ; n = 6 et n = 3 (spécifiques au triangle) et une classe résiduelle. Les réponses numériques retenues sont celles données par un pourcentage de sujets supérieur à .04. Cette classification est utilisée pour l'analyse des erreurs concernant le triangle (celles concernant le carré étant trop rares pour une analyse spécifique).

— Phases 2 et 4, de mesure de la surface transformée. Une première classification oppose, comme pour le pavage, des réponses correctes (notées +) et des réponses fausses ou des absences de réponse. Les réponses correctes correspondent à la multiplication de la mesure de la petite figure par le cœfficient entier 4 pour obtenir la mesure de la figure transformée (r = 2) (aucun compte n'est tenu des représentations graphiques présentes ou précédentes).

Une deuxième classification plus fine est utilisée pour étudier la cohérence des réponses : dans l'expression de la surface transformée il y a pratiquement toujours un rapport entier (2, 3 ou 4) entre mesure transformée et mesure initiale[8]. Les non-réponses et celles pour lesquelles on ne peut repérer l'existence d'un tel cœfficient multiplicatif sont classées X.

8. Les multiplications sont « posées » dans un certain nombre de protocoles. Pour presque tous les autres il est facile de retrouver ce rapport ; dans quelques rares cas nous avons dû tenir compte des connaissances sur les erreurs dans le calcul décimal, que l'on a par ailleurs, pour faire apparaître ce rapport : ainsi 3,5 est un résultat (erroné) du produit de 1,5 par 3, 4,20 de 1,5 par 4 …

1.b *Les tableaux sources TA et TN*

Ces tableaux fournissent, pour la similitude de rapport 2, l'essentiel des réponses des sujets des différents niveaux scolaires, pour les questionnaires SA et SN.

Le premier groupe de tableaux fournit la répartition, en pourcentage, des réponses des élèves pour les 4 formes utilisées lorsque la surface est exprimée en nombre de pots de peinture (mode noté par a dans les tableaux ultérieurs).

Le second groupe de tableaux est construit de façon analogue pour l'expression en cm^2 (mode b).

Le troisième groupe de tableaux fournit pour les modes a et b la répartition des couples de réponses pour les deux triangles équilatéral et obtus.

Le quatrième groupe est construit de manière similaire pour les couples de réponse pour le carré et le disque. (Les réponses XY dénotent deux réponses différentes non spécifiées).

Le cinquième groupe concerne le passage du pavage à l'expression de la surface pour chacun des deux modes opératoires.

« pavage + » : réponses au pavage correctes ;

« pav + peint + » et « pav + cm^2 + » : réponses correctes au pavage, suivies de réponses correctes pour la surface, exprimée respectivement en nombre de pots de peinture et en cm^2.

Les pourcentages de réponses sont données pour les formes communes au pavage et à l'expression de la surface.

Le taux de passage d'une réponse correcte au pavage à une réponse correcte pour la surface est le quotient des pourcentages « pav + peint + » (et « pav + cm^2 + ») par les pourcentages « pav + » du mode correspondant.

a

CM1	□	○	△	◺
4	52	28	28	16
2	48	60	40	60
3	-	8	32	16
X	-	4	-	8

CM2	□	○	△	◺
4	76	47	41	23
2	22	39	18	22
3	-	6	33	47
X	2	8	8	8

6e	□	○	△	◺
4	75	32	50	27
2	18	53	9	23
3	5	11	30	48
X	2	4	11	2

5e	□	○	△	◺
4	86	36	62	48
2	12	41	10	14
3	2	9	26	31
X	-	14	2	7

4e	□	○	△	◺
4	88	50	72	56
2	9	31	9	16
3	-	-	19	28
X	3	19	-	-

b

CM1	□	○	△	◺
4	48	12	20	16
2	40	76	72	48
3	-	-	4	4
X	12	12	8	32

CM2	□	○	△	◺
4	53	17	12	10
2	29	61	49	45
3	-	-	16	16
X	18	22	23	29

6e	□	○	△	◺
4	50	16	32	18
2	39	73	53	46
3	-	-	4	18
X	11	11	11	18

5e	□	○	△	◺
4	52	24	38	36
2	34	55	43	43
3	-	2	12	2
X	14	19	7	9

4e	□	○	△	◺
4	63	25	53	50
2	34	63	25	16
3	-	-	16	28
X	3	12	6	6

TE/TO

CM1	44	22	33	XY
a	12	32	-	56
b	12	48	-	40

CM2	44	22	33	XY
a	22	12	22	45
b	8	41	6	45

6e	44	22	33	XY
a	26	7	21	46
b	16	41	2	41

5e	44	22	33	XY
a	43	7	12	38
b	31	33	-	36

4e	44	22	33	XY
a	50	9	9	32
b	50	16	16	18

Co/Ce

CM1	44	22	42	XY
a	28	44	16	12
b	8	40	36	16

CM2	44	22	42	XY
a	47	16	23	14
b	16	29	25	10

6e	44	22	42	XY
a	30	11	37	22
b	16	38	30	16

5e	44	22	33	XY
a	36	9	28	27
b	21	31	19	29

4e	44	22	33	XY
a	50	9	22	19
b	25	31	28	16

	CM1	□	△
a	pavage +	76	40
	pav+; peint+	40	16
	taux passage	52	40
b	pavage +	92	56
	pav+; "cm²" +	44	12
	taux passage	48	21

CM2	□	△
pavage +	88	39
pav+; peint+	71	25
taux passage	80	65
pavage +	90	63
pav+; "cm²" +	49	10
taux passage	54	16

6e	□	△
pavage +	89	57
pav+; peint+	73	34
taux passage	82	60
pavage +	93	89
pav+; "cm²" +	50	32
taux passage	54	36

5e	□	△
pavage +	90	55
pav+; peint+	83	55
taux passage	92	100
pavage +	98	88
pav+; "cm²" +	48	36
taux passage	49	41

4e	□	△
pavage +	100	72
pav+; peint+	88	59
taux passage	88	83
pavage +	100	90
pav+; "cm²" +	63	53
taux passage	63	59

Tableau TA

6e	□	▱	○	△	⊿
4	86	82	31	70	61
2	11	9	56	6	11
3	-	3	3	18	26
X	3	6	5	5	2

(a)

5e	□	▱	○	△	⊿
4	87	87	22	80	67
2	9	9	62	9	9
3	-	-	-	9	20
X	2	4	13	2	4

(a)

4e	□	▱	○	△	⊿
4	91	80	20	60	54
2	6	6	51	11	20
3	-	-	3	26	23
X	3	14	26	3	3

6e	□	▱	○	△	⊿
4	77	73	28	64	66
2	10	10	54	8	10
3	-	-	2	16	11
X	13	19	16	11	13

(b)

5e	□	▱	○	△	⊿
4	76	77	20	76	72
2	13	9	65	9	13
3	-	-	-	7	9
X	11	14	15	8	6

(b)

4e	□	▱	○	△	⊿
4	72	66	26	63	51
2	14	14	46	14	23
3	-	-	-	9	17
X	14	20	28	14	9

6e	44	22	33	XY
	56	7	13	24
	57	8	6	29

TE/TO

5e	44	22	33	XY
a	69	9	7	15
b	65	9	4	22

TE/TO

4e	44	22	33	XY
a	49	11	17	23
b	49	14	9	29

6e	44	22	42	XY
a	31	13	40	16
b	26	10	44	20

Ca/Ce

5e	44	22	42	XY
a	22	7	41	30
b	17	3	46	34

Ca/Ce

4e	44	22	42	XY
a	20	6	46	28
b	23	14	49	34

6e	□	△
pavage +	93	52
pav+; peint+	80	49
taux passage	86	94
pavage +	92	75
pav+, "cm²"+	77	57
taux passage	84	76

5e	□	△
pavage +	97	65
pav+. peint+	85	65
taux passage	89	100
pavage +	97	91
pav+; "cm²"+	74	76
taux passage	77	83

4e	□	△
pavage +	91	74
pav+; peint+	89	54
taux passage	97	73
pavage +	97	77
pav+, "cm²"+	69	57
taux passage	71	74

Tableau TN .

Pourcentage des sujets (des différents niveaux scolaires) selon leur réponse dans les différentes tâches.
a: mode « peinture » (phases 1 et 2)
b: mode « cm²» (phases 3 et 4).
Te/To: couples de réponses pour les deux triangles
Ca/Ce: couples de réponses pour le carré (Ca) et le cercle (Ce).

La présentation des résultats d'ensemble est effectuée à partir des données de ces tableaux source. Des résultats plus spécifiques sont étudiés dans les paragraphes suivants sur la disponibilité et la mobilisation des représentations (V.2), sur le domaine de validité des opérations (V.3), sur les effets du mode opératoire (V.4) et sur les effets de l'organisation de la situation-problème (V.5).

1.c. Analyse globale des résultats

L'appropriation des notions de « bidimensionalité » de la mesure-surface se confirme comme un processus long et complexe. Les interactions entre les opérations mentales des enfants et adolescents et les propriétés des figures ou des transformations sont très fortes.

Les représentations mentales ou figurales qui permettent les opérations de pavage et de dénombrement évoluent en interaction avec les propriétés des figures et les caractères de la tâche. Pour des figures comme les carrés et rectangles, elles sont disponibles dès la fin de l'enseignement primaire. Pour des enfants plus jeunes, comme pour les figures plus complexes (le triangle), ces représentations doivent être mobilisées. La donnée d'exemple de pavage est un mode possible de mobilisation, la structuration interne de la tâche en est un autre.

Ces représentations de pavage peuvent permettre un décompte correct des petites figures contenues dans la grande : elles n'assurent pas pour autant le calcul de la surface de cette grande figure à partir de la donnée de celle de la petite. La disponibilité spontanée semble un facteur important dans la réussite de ce passage du pavage au calcul de la mesure.

Par ailleurs, les représentations de pavage, tout comme le passage à la mesure surface, sont fortement dépendantes des figures : le domaine de validité des opérations sur la mesure-surface reste limité quant à la nature des figures et certainement aussi quant à l'amplitude des transformations.

Dans les conditions expérimentales utilisées, les propriétés de bidimensionalité manifestées pour des figures pavables sont très peu généralisées à des figures non pavables (comme le disque).

Le mode opératoire utilisé pour l'expression de la surface agit sur le passage possible du décompte additif au calcul de la surface : une expression unidimensionnelle, comme la quantité de peinture nécessaire pour peindre la surface, assure une plus grande cohérence des réponses, l'expression bidimensionnelle avec l'unité « cm^2 » « transporte » éventuellement les propriétés de l'unité linéaire « cm ».

Enfin la structuration de la situation problème constituée par les questionnaires a des effets très importants sur l'organisation des réponses des sujets.

2. Disponibilité et mobilisation des représentations

2.a. Le dénombrement

Pour la question « combien de petites figures y a-t-il dans la grande », un pavage, mental ou figuré, permet une réponse appuyée sur un dénombrement. Une telle représentation, mentale ou figurale, peut être immédiatement disponible, ou — au contraire — nécessiter d'être « mobilisée », en particulier par la donnée d'un exemple. Les figures 7 et 7bis montrent, pour les questionnaires SA et SN (pour r = 2) l'évolution du pourcentage de réponses correctes dans les deux phases de « pavage » : phase 1 (pavage spontané) où la disponibilité doit jouer, et phase 3 (pavage avec exemple) qui fait intervenir une certaine mobilisation.

On voit qu'à la fin de l'enseignement primaire, les représentations nécessaires sont acquises pour le carré. En fin de CM_1 (enfants de 10 ans environ) seule une petite minorité d'élèves a besoin d'une « mobilisation » des représentations : celle-ci est alors toujours efficace.

Il en va très différemment pour le triangle : il faut une longue évolution pour que les représentations de pavage du triangle soient mobilisables (fin de 5^e). C'est seulement en fin de 4^e que ces représentations sont disponibles pour les trois-quarts des élèves. On doit d'autre part remarquer la dépendance des réponses par rapport à la situation problème. Il faut souligner que dans le questionnaire SA, l'élément de mobilisation est la donnée du pavage figural d'un carré alors que dans SN le triangle et le carré sont tous deux pris comme exemple : cela semble sans effet sur la mobilisa-

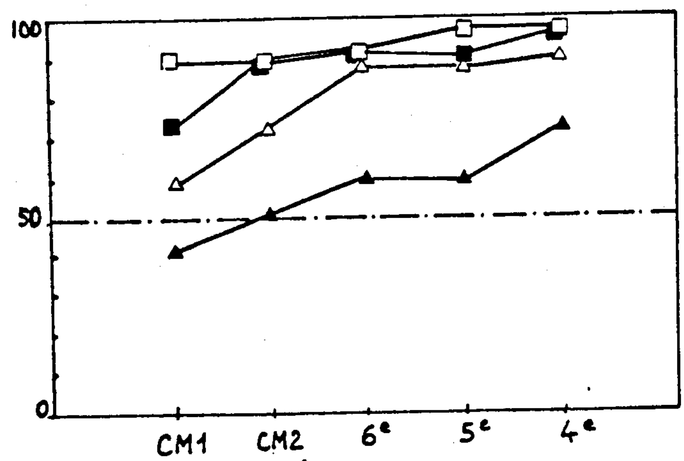


Figure 7

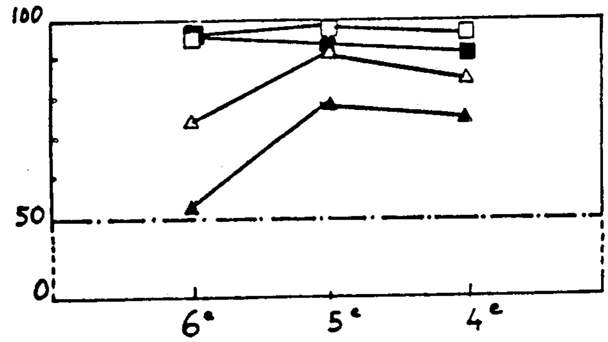


Figure 7bis
Pourcentage des réponses correctes selon le niveau scolaire, pour le pavage spontané (en noir) et pour le pavage avec exemple (en blanc); en haut — questionnaire SA; en bas — questionnaire SN.

tion. Notre hypothèse est que l'information donnée au sujet est un résultat statique. L'opération par laquelle on construit le pavage d'un triangle en triangles semblables n'est pas fournie: si le sujet est appelé à effectuer une représentation figurale, il n'a pas nécessairement pour autant les moyens opératoires pour qu'elle soit correcte.

2.b Cohérence entre les opérations de dénombrement et le calcul de la surface.

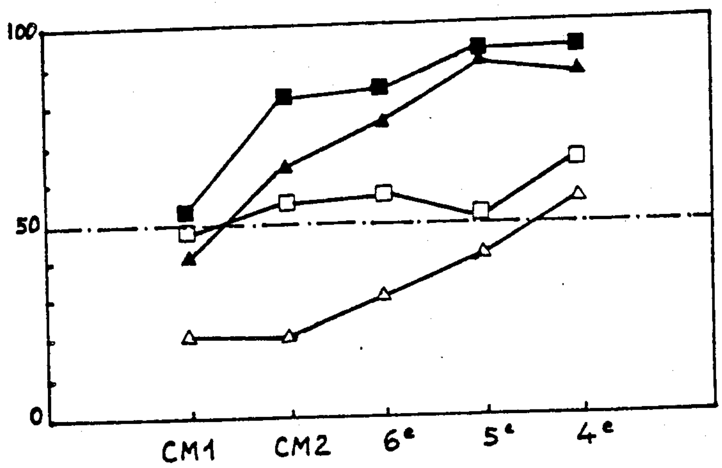
La question qui se pose est la suivante: quand l'enfant a donné le nombre de «petites» figures qui sont contenues dans la «grande» et qu'on lui fournit ensuite une mesure de la surface de la «petite» figure, calcule-t'il la mesure de la surface de la«grande» figure à partir de la réponse numérique antérieurement donnée?

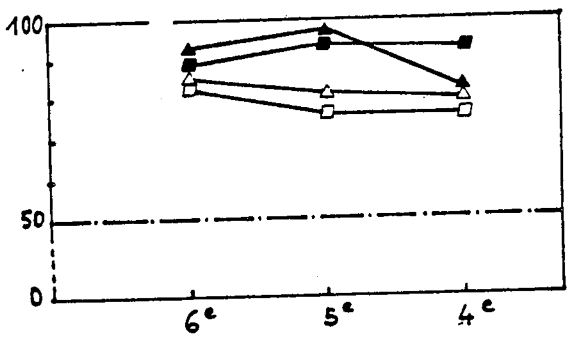
Les figures 8 et 8 bis donnent l'évolution du «taux de passage» entre une réponse correcte pour le «pavage» et une réponse correcte pour la mesure de surface (pour les questionnaires SA et SN respectivement).

Ces figures montrent tout d'abord que le passage ne va pas de soi. Elles montrent aussi qu'il y a de très fortes interactions avec la nature des figures, le mode opératoire utilisé, le statut de la réponse de pavage et enfin la situation-problème elle-même. Lorsque le pavage est disponible, les taux de passage sont très voisins pour le carré et le triangle (pour l'un et l'autre questionnaires). Ils sont toujours meilleurs que ceux concernant le pavage «suscité» et la mesure en cm^2. Il en est ainsi même pour le questionnaire SN pour lequel la différence entre les modes opératoires «peinture» et «cm^2» est faible (Figure 8). *Une représentation «disponible» semble donc plus opératoire qu'une représentation «mobilisée».*

2.c Effet de la valeur du rapport de similitude

Nous avions intentionnellement choisi des rapports de similitude «petits» (r = 2 ou 3). La numérosité du résultat du pavage est alors assez faible (4 ou 9) pour être aisément dominée par les enfants des niveaux scolaires considérés. De plus la «niche informationnelle» (cf. Brousseau) des nombres manipulés (2, 3, 4, 9) ne change pas: il en irait différemment si nous comparions des rapports tels que r = 2 et r = 12 par exemple (4 et 144 n'appartiennent plus à la même «niche informationnelle» et des questions propres à





Figures 8 et 8 bis

Pourcentage des réponses correctes pour la mesure de surface parmi les sujets qui ont une réponse correcte au pavage (en noir: mode «peinture», en blanc: mode «cm^2»). En haut: questionnaire SA; en bas: questionnaire SN.

à ce changement de niche pourraient intervenir). Néanmoins la comparaison des réponses des enfants et adolescents montre des différences.

D'une part des représentations opératoires (conduisant à des réponses correctes) sont davantage disponibles pour une similitude de rapport 2, et cela pour le carré comme pour le triangle. D'autre part la mobilisation est un peu moindre, bien que les différences portent sur de petits pourcentages de réponses. Le tableau donne la distribution des réponses couplées pour le pavage «spontané» (phase 1) et pour le pavage «avec exemple» (phase 3) pour l'ensemble des sujets ayant passé le questionnaire SA. Les notations sont en réussite/échec; ainsi la réponse − + désigne une réponse fausse ou absente pour le pavage spontané suivie d'une réponse correcte pour le pavage avec exemple. (Voir ci-contre, Tableau III).

Ces différences globales ne se traduisent pas nécessairement par une hiérarchie dans les réponses. Les graphes d'implication, construits à partir de l'indice de Gras-Lerman (1982) sont donnés ci-dessous pour la phase de «pavage spontané» de ce même questionnaire SA. Une flèche pleine tracée d'un item a à un item b signifie que la réussite à a implique, statistiquement, la réussite à b, et que la composition des flèches peut se faire : une flèche pointillée signifie qu'il y a bien implication statistique entre a et b mais que la transitivité n'est pas vérifiée.

Le graphe 1 montre l'absence de hiérarchie en fonction de la valeur du rapport de similitude : tout se passe comme si pour $r = 3$ il était simplement plus probable de faire une erreur.

Le graphe 2 est construit de façon analogue pour le pavage spontané du questionnaire SN : il montre cette fois une hiérarchie des réponses selon la valeur du coefficient d'homothétie, mais seulement pour le carré et le parallélogramme. Nous y reviendrons à propos du domaine de validité des opérations du sujet.

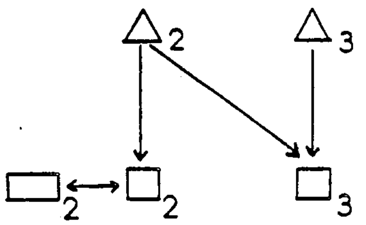
3. Domaine de validité des opérations du sujet

Les résultats précédents ont déjà fait apparaître des ressemblances et différences régulières entre les formes utilisées : carrés, parallélogrammes, triangles et cercles.

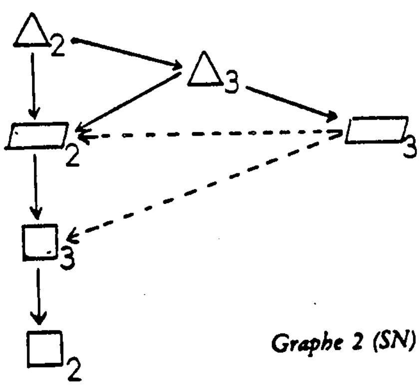
	++	−+	+−	−−
$\square_2$	81	10	4	3
$\square_3$	72	17	5	6
$\triangle_2$	43	28	5	24
$\triangle_3$	33	31	6	30
Ens. des pavages	28	26	3	42*

Tableau III

Pourcentage des couples de réponses (correctes ou non correctes) aux deux phases de pavage des carrés et triangles, sur l'ensemble des sujets du questionnaire SA.



Graphe 1 (SA)



Graphe 2 (SN)

Le statut particulier de cette dernière forme s'explique a priori : il ne s'agit pas d'un polygone, et on ne peut la paver par aucun pavage régulier.

Les réponses fournies pour cette forme ne peuvent donc relever des mêmes opérations que celles concernant les autres formes utilisées qui sont au contraire « auto-pavables » au sens où elles sont pavables par des formes semblables. Cette situation commune n'assure pas que les mêmes opérations soient valides, comme nous allons le voir dans les paragraphes 3. b et 3. c.

3. a Généralisation des réponses du carré au cercle.

L'étude des couples de réponses pour le carré et le disque, dans les phases de mesure de surface, donne des informations sur les généralisations faites par les enfants et adolescents.

Dans le questionnaire SA, les réponses cohérentes tournent autour de 50% mais une part importante de ces réponses cohérentes est fournie par des réponses unidimensionnelles : le sujet utilise alors dans les deux cas le même modèle linéaire.

Dans le questionnaire SN la diminution d'utilisation du modèle linéaire pour les figures autopavables se traduit par une diminution de la cohérence des réponses : les réponses cohérentes correctes représentent autour de 25% des réponses, les réponses unidimensionnelles sont rares (autour de 10%).

La complexité de ces résultats indique que le statut d'une réponse de généralisation n'est pas univoque. Mais la faiblesse des généralisations indique aussi la limitation du domaine de validité d'une propriété fondamentale de bidimensionalité de la mesure-surface.

3. b Effet des réalisations différentes d'une « même » forme : le triangle.

La dénomination de « triangle » couvre toute une classe de formes équivalentes à certains égards : ce sont les polygones définis par 3 sommets non alignés (ou 3 côtés portés par des droites ni confondues ni concourantes).

Nous avons, dans les questionnaires, utilisé deux réalisations différentes de cette forme générique : un triangle équilatéral — pour lequel les questions de pavage ont été posées dans SA et SN, et un triangle dit obtus — pour lequel le pavage n'a été utilisé que dans la phase 3 de SN. La comparaison des réponses pour la mesure de surface dans la phase 2 (surface comme quantité de peinture) pour SA et SN permet d'étudier l'extension du domaine de validité pour le passage du pavage à la mesure. La même comparaison pour la phase 4 de SA permet d'étudier le domaine de validité pour la mesure exprimée bidimensionnellement en cm^2.

Construit à partir des tableaux sources, le tableau VIII donne le pourcentage des réponses cohérentes pour les triangles équilatéral et obtus en fonction de la tâche, du mode opératoire et du niveau (les données entre parenthèses sont les pourcentages de réponses correctes).

La cohérence des réponses est relativement élevée mais une part importante est constituée de réponses fausses. Jusqu'en 5^e la généralisation des opérations correctes effectuées sur le triangle équilatéral au triangle obtus reste assez faible. C'est à partir de la fin de la 5^e que la mobilisation de représentation de pavage semble se traduire par une plus grande cohérence.

Le domaine de validité d'opérations comme le passage du pavage à la mesure est donc limité, même quand il s'agit de réalisations différentes d'une « même » forme, dans des situations où ces opérations doivent être très disponibles. Mais la mobilisation possible de ces opérations semble aller de pair avec une extension de leur domaine de validité.

3.c *Comparaison des formes utilisées : carrés, parallélogrammes, triangles*

D'une part toutes ces formes sont autopavables, mais les procédures qui conduisent à un pavage correct sont différentes : pour le carré (et le rectangle) comme pour le parallélogramme il suffit de croiser deux directions indépendantes ; pour le triangle il faut croiser trois directions dépendantes. La logique de la procédure de pavage dans les deux premiers cas est étroitement liée à la structure multiplicative du plan : il en va tout autrement pour le triangle.

D'autre part, la familiarité scolaire des diverses formes est différente : les carrés et rectangles sont présents très tôt dans l'enseignement (y compris sous la forme des tableaux cartésiens), les triangles sont eux aussi très fréquents, les parallélogrammes sont beaucoup moins des supports de travail scolaire (et sont mal identifiés en tant que tels ; les élèves mêlent souvent dans une même classe trapèzes, losanges et parallélogrammes : bref, les quadrilatères non familiers)[9].

Une question est donc de déterminer ce qui l'emporte d'une familiarité scolaire ou de la logique d'une procédure sur laquelle la situation problème ne focalise que peu de questions.

Nous avons, pour répondre à cette question, calculé d'une part la corrélation des réussites aux différentes tâches qui impliquent les couples carrés/parallélogrammes et parallélogrammes/triangles, et d'autre part établi avec Régis Gras le graphe d'implication pour les items de pavage spontané du questionnaire SN où apparaissent les trois formes (cf. graphe 2). Les résultats sont les suivants : la corrélation entre carré et parallélogramme est très forte : r = 0,83 ; celle entre parallélogramme et triangle très faible : r = 0,096 ; le graphe d'implication montre la hiérarchie de difficulté suivante : (triangle)/(parallélogramme) (carré) pour les deux cœfficients de similitude.

Les caractères « logiques » des formes sont donc déterminants par rapport à la simple familiarité des formes dans l'enseignement.

4. *Effets du mode opératoire*

Toutes les données déjà présentées ont mis en évidence un effet du mode d'expression de la surface sur les opérations cognitives mises en œuvre par les élèves : les opérations qu'ils effectuent spontanément avec une expression unidimensionnelle de la surface (ici : la quantité de peinture) ne sont pas nécessairement réinvesties lorsque la surface est exprimée avec une unité bidimensionnelle (ici : le cm^2).

9. Il faut préciser que très peu d'exercices exigent de la part de l'élève des opérations de pavage, néanmoins les constructions de tableaux cartésiens donnent objectivement des pavages en carreaux, si ce n'est en carreaux semblables à la forme d'ensemble.

Si l'on se reporte aux figures 6 et 7 on voit que l'effet du mode opératoire ne se manifeste pas de façon identique selon l'opération considérée, ni selon le niveau scolaire (pour SA), et enfin que la situation-problème produit des effets différents : les interactions entre les propriétés des figures, le déroulement de la tâche et le mode opératoire sont fortes et complexes.

Le contraste entre l'ampleur que peut prendre l'effet du mode opératoire dans le questionnaire SA (par exemple pour le passage du pavage à la mesure du triangle) et sa disparition pour certaines questions dans le questionnaire SN (les réponses correctes pour la mesure du triangle) conduit à étudier de façon particulière les différences apparues entre les deux situations-problèmes définies respectivement par ces deux questionnaires.

5. *Organisation de la situation-problème et transformation de la tâche*

Nous avons vu que, pour de nombreuses questions, SA et SN ont donné des résultats différents, ne portant pas tous sur les points qui différenciaient les deux questionnaires : rappelons que SN était construit à partir de SA en introduisant des modifications visant trois objectifs :

— vérifier le statut des opérations de pavage (mental ou figuré) par rapport à la structure des figures en opposant des figures pavables par croisement de deux directions indépendantes et des figures pavables par croisement de trois directions liées : l'introduction du parallélogramme permettait la comparaison entre deux figures non pavables par des cm^2, s'opposant par leur structure ;

— situer de façon analogue le carré et le triangle équilatéral en donnant en phase 3 un exemple de pavage pour le carré *et* pour le triangle ;

— favoriser l'utilisation du cm^2 pour exprimer des surfaces non pavables en carrés de 1 cm × 1 cm par la manipulation de cette unité dans des situations de partition simple (en 2 figures superposables), avant les questions de mesure en cm^2.

5.a Au vu des résultats rapportés dans les paragraphes précédents on pourrait penser que ces modifications ont agi comme prévu ; qu'elles ont permis de mobiliser des opérations peu disponibles spontanément mais faisant bien partie du champ des concepts acquis par les enfants et adolescents concernés.

Il est très probable que cette interprétation rend bien compte de certaines améliorations de performance. En particulier l'organisation même du questionnaire SN a sans doute permis aux élèves de mieux entrer dans la tâche.

Cependant un certain nombre d'indices nous conduisent à supposer que la situation a été modifiée plus profondément et que le contenu des questions a été, pour partie, déplacé. Expliquons-nous.

D'une part, l'amélioration des réponses sur le « pavage » et sur la « surface-peinture » se produit pour le triangle *avant* la modification concernant cette figure. Un « appel » à la représentation du pavage semble avoir eu lieu du (seul) fait de la forte structuration de la phase 1 dans SN (où les questions portent systématiquement sur trois formes différentes, avec les deux rapports de similitude).

D'autre part, le changement introduit dans la phase 3 de SN portait sur les pavages de triangle et non sur le carré : or les modifications de réponses de la phase 4 ont concerné le carré, alors que la nature et la cohérence des réponses pour les triangles sont analogues dans les phases 2 et 4. (Pour le carré, la diférence entre modes opératoires constatée dans le questionnaire SA disparaît, à partir de réponses analogues dans la phase 2).

Nous avons donc analysé précisément d'une part l'ensemble des réponses qui dans SN concernent l'expression en cm^2 de la mesure de surface et d'autre part celles qui concernent la mesure des triangles.

5.b Dans les questions de bipartition de surfaces mesurées en cm^2 l'additivité est à mettre en œuvre sous une forme très simple : « à figure partagée en deux, mesure divisée par deux », le partage étant donné dans la question même. Dans les questions sur les figures semblables de la phase 4, il faut d'abord se représenter l'opération de pavage demandée dans une phase antérieure, puis appliquer l'additivité sous une forme plus générale — en prenant en compte l'égalité des mesures des figures du pavage pour passer à la multiplication par le facteur 4. Même si l'on suppose que dans la phase de manipulation de l'unité « cm^2 » la mobilisation de l'usage du cm^2 présente une certaine difficulté pour les enfants, il est peu plausible que cette difficulté se maintienne dans toute cette phase pour diminuer brusquement pour la phase suivante, dont les tâches sont plus complexes.

On devrait donc s'attendre à ce que les questions concernant le parallélogramme et le triangle rectangle présentées en fin de la phase de manipulation du cm^2 soient plus faciles que celles de la phase 4 portant sur des figures analogues ou plus complexes (triangles non rectangles) : or le tableau IV, qui donne les pourcentages de réussite pour les différentes figures, dans les deux tâches, montre des résultats contraires à ceux attendus. (Voir Tableau IV ci-contre).

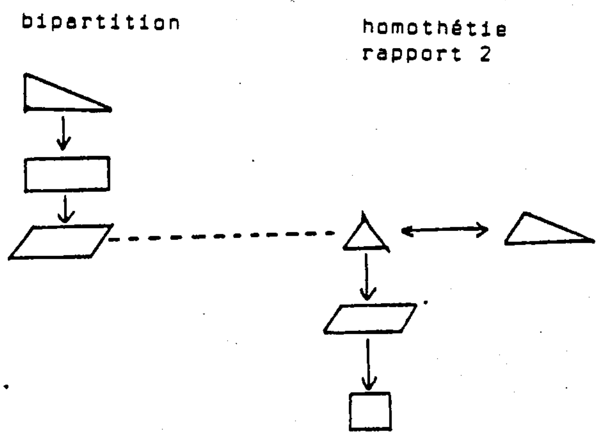
Pour toutes les figures, les pourcentages de réussites sont meilleurs dans la phase 4 (figures semblables) que dans la phase de partition. Le graphe 3, (voir ci-contre), qui est le graphe d'implication des différents items utilisant le cm^2, confirme la validité, sujet par sujet, des résultats d'ensemble du tableau IV.

Plus précisément, les deux phases d'utilisation du cm^2 apparaissent à la fois ordonnées (à l'inverse de l'ordre attendu) et dissociées (à l'intérieur de chaque phase les items sont ordonnés de façon hiérarchique, mais une seule flèche implicative relie les deux phases), cela nous conduit à supposer que les processus mis en œuvre, s'ils se recoupent, ne sont néanmoins pas de même nature.

5. c L'analyse de la dernière phase du questionnaire SN, où le pavage (ou du moins le décompte des petites figures) est rappelé comme question intermédiaire éclaire, au moins en partie, le processus de réponse de certains élèves. En effet la comparaison entre les propriétés des représentations figurales pour le triangle « obtus » et les réponses numériques montre que pour un nombre non négligeable d'élèves des réponses correctes correspondent à des représentations où les figures du partage n'ont pas la même surface : les propiétés nécessaires pour le calcul « grande surface = n x petite surface » ne sont pas vérifiées.

forme / tâche	carré ou rectangle	parallélogramme	triangle	
rép. correcte	1 cm²	1 cm²	0,5 cm²	1 cm²
bipartition	59	63	51	54
rép. correcte :	16 cm²	20 cm²	8 cm²	4 cm²
similitude	76	72	70	68

Tableau IV
Pourcentage des réussites (6ᵉ-5ᵉ-4ᵉ-) aux tâches utilisant les « cm² » dans le questionnaire SN pour les trois formes.



Graphe 3
Graphe d'implication entre les différents items utilisant le « cm² ».

Le tableau V donne la répartition (en pourcentage) des sujets selon le couple de leurs réponses numérique et figurale.

Une représentation figurale dans laquelle le pavage est fait en figures approximativement équivalentes est notée : D+ ; si les surfaces sont visiblement différentes : D − ; l'absence de représentation figurale est notée Δ.

La réponse pour la mesure est notée n+ si le coefficient utilisé pour le calcul est égal au nombre de petites figures représentées, ou s'il est correct sans représentation figurale ; n− dans le cas contraire ; Δ s'il n'y a pas de réponse ou si elle ne correspond pas au produit par un facteur entier. (Les pourcentages entre parenthèses correspondent à une réponse numérique correcte).

6e	D+	D−	Ø
n +	37 (30)	30 (23)	5 (2)
n −	9	7	7
Ø	-	2	3

5e+4e	D+	D−	Ø
n +	58 (50)	15 (11)	5 (3)
n −	5	3	8
Ø	1	-	4

Tableau V

Répartition des sujets selon leurs réponses numérique et figurale.

En 6ème près de la moitié des réponses correctes accompagnent des représentations où les figures du pavage n'ont pas la même surface. En 5ème et 4ème cela concerne encore plus de 15% des réponses numériques correctes.

5. d Une hypothèse nous semble rendre compte des résultats paradoxaux qui précèdent : pour certains élèves, la forte structuration de la tâche initiale a transformé la situation en un problème multiplicatif canonique, d'où les concepts liés à la mesure de longueur et à celle de surface peuvent être « gommés ».

On peut schématiser ainsi ce problème canonique : *« étant donnée une « grande » figure, trouver le nombre de petites figures (semblables) qui la composent ; sachant que la petite figure mesure « x » calculer combien mesure la « grande ». »*. Une fois la réponse de pavage donnée, le mode opératoire ne joue alors plus.

Si une telle transformation de la tâche a lieu on comprend que, pour certains sujets, les questions portant sur la bipartition de surfaces soient plus difficiles que celles sur les figures semblables : aucun « pattern » multiplicatif n'y est construit comme préalable, et les élèves doivent se rapporter au sens du problème posé, et en particulier rencontrer l'additivité de la mesure de surfaces.

Une telle hypothèse est compatible avec le traitement spécifique du disque, auquel ne se rapporte aucune opération de décompte, largement indépendant des réponses fournies pour les autres figures.

En conclusion on peut dire que la structuration de la phase initiale dans le questionnaire SN semble avoir produit un double effet contradictoire : d'une part une mobilisation de la représentation, et de l'usage du pavage, permettant d'aborder la tâche de mesure de surface dans de meilleures conditions ; d'autre part une transformation de la situation-problème, gommant pour partie son contenu conceptuel.

Cet effet est sans doute particulièrement important dans des périodes d'évolution des concepts concernant la mesure-surface (6ème), la contradiction s'effaçant quand les conceptions sur les mesures spatiales sont globalement stabilisées (4ème).[10]

VI. Conclusion

Les expériences dont on a rendu compte plus haut confirment la complexité du champ des mesures spatiales.

Des « points d'ancrages » existent dès le cours moyen, tant pour la longueur que pour la surface : à partir des schèmes additifs valides pour toute mesure, un modèle linéaire se constitue pour la mesure de longueur, pour laquelle il est efficace ; par ailleurs les représentations de pavage des formes liées à la structure bidimensionnelle du plan (rectangles, parallélogrammes) fournissent avec l'additivité un point d'ancrage pour la mesure de surface.

10. La passation dans une classe de 4[e], sans particularités, de la question de l'enquête INRP (INRP 1975) concernant la surface a confirmé les difficultés de cette notion : les obstacles rencontrés par les élèves dans l'utilisation d'une échelle de mesure recoupent les observations faites dans nos questionnaires à partir de similitudes.

Cependant le domaine de validité des opérations reste limité, en particulier pour la mesure de surface : quant aux figures considérées, quant au domaine numérique : la bidimensionalité de la mesure surface, à la fois opposée et coordonnée à l'unidimensionalité de la mesure-longueur, n'est pas un concept que la majorité des adolescents se soit appropriée à l'issue de l'enseignement sur les mesures spatiales.

Les difficultés persistantes constatées nous semblent dues à l'existence d'obstacles cognitifs et épistémologiques qui se renforcent mutuellement, dont les principaux sont les suivants : le passage des structures additives aux structures multiplicatives, et la constitution de celles-ci comme domaine propre, la reconnaissance de la dimensionalité relative d'« objets » géométriques — les lignes, surfaces et volumes — la notion d'équivalence qui fonde la mesure des formes non pavables et sous-entend des propriétés de continuité, complexes pour certaines.

Nous faisons l'hypothèse qu'en fait l'enseignement limite son intervention par rapport à ces questions de fond parce qu'il s'est adapté à ces obstacles cognitifs (dont le passage des structures additives aux structures multiplicatives, la dissociation des propriétés co-présentes de bord et d'intérieur des figures planes ou des objets) et à ces obstacles épistémologiques (dont la modélisation des lignes géométriques par l'ensemble des réels, en liaison avec les notions de continuité, la notion de produit de mesures...).

A la suite de l'évolution de l'enseignement, en particulier ces 20 dernières années, on a assisté à un phénomène d'obsolescence des mesures spatiales comme objet d'enseignement (en relation avec la transformation de l'enseignement de la géométrie). Leur statut dominant est devenu celui de connaissances pratiques ; or la mathématisation est à l'heure actuelle très peu reconnue comme faisant partie de l'enseignement des mathématiques : les conditions du débat « théorique » sur les problèmes complexes évoqués plus haut ne sont ainsi qu'exceptionnellement offertes aux élèves dans leurs activités.

Des expériences montrent pourtant (Douady 1980)) que, sur cette base de la mathématisation, on peut conduire de jeunes élèves à une approche productive de notions considérées comme complexes et rejetées loin dans l'enseignement dans le cadre d'une conception déductiviste des mathématiques, (les réels, par exemple). Cela nous paraît une perspective importante de recherches didactiques à mener dans ce domaine des mesures spatiales, en relation à la fois avec les structures de types algébriques (relation additif/multiplicatif) et les notions relevant de l'analyse.

Annexe

1. Le "Modèle linéaire" :

fiabilité du fonctionnement cognitif et domaine de validité

Nous avons vu dans la partie concernant la dimensionalité des mesures de longueur et surface que l'"unidimensionalité" de la longueur apparaissait utilisée de façon relativement précoce par les enfants, produisant ce que nous avons appelé un "modèle linéaire".

Ce "modèle linéaire" permet de passer de connaissances sur des longueurs (au moins certaines de celles-ci) d'une figure à des connaissances sur les longueurs homologues d'une figure transformée par homothétrie simple. Nous sommes ici dans le domaine présenté sur le plan scolaire comme celui des "échelles" (introduit essentiellement en CM2 et revu en 6ème - et plus tard encore par les enseignants de géographie).

Nous avons vu que ce "modèle linéaire" ne semblait pas dépendre (aux âges considérés tout au moins) du mode opératoire choisi pour désigner les longueurs, mais que des discordances dans certaines réponses signalaient des difficultés de mise en oeuvre dans l'arithmétisation.

Cela nous conduit à aborder deux problèmes : celui du domaine de validité de ce modèle linéaire (que notre travail ne nous a pas fait aborder) et celui de sa fiabilité, pour lequel nous avancerons quelques éléments à partir de nos données.

1.1. Domaine de validité

Nous avons vu fonctionner le "modèle linéaire" dans une situation où l'enfant travaillait sur 2 représentations géométriques de la figure initiale et d'une seconde figure homothétique (avec une échelle de 2, 3, ou 1/2) avec une échelle très simple.

Or, la notion plus générale d'échelle, - qui correspond au seul cas où l'élève manipule des homothéties/similitudes avec de grands rapports numériques - recouvre bien la notion d' unidimensionalité de la longueur, mais elle fonctionne dans un domaine très spécifique :

Dans la plus grande partie des cas (échelle dans le plan) la transformée est une représentation graphique alors que la donnée initiale n'est pas directement une représentation : ainsi une carte au $\frac{1}{200.000e}$ est une représentation matérielle qui a pour référence matérielle un "territoire géographique" , alors que les problèmes de reproduction d'un dessin à une échelle double ou moitié (par exemple) font fonctionner l'échelle (l'unidimensionnalité de la longueur) dans le domaine des cartes (et non entre carte et territoire).

La question que nous avions succintement évoquée (dans le chapitre précédent) de la nature des transformations ayant un invariant dimensionnel <u>quels que soient les "objets "transformés</u> demande à être étudiée "ès qualités" si nous voulons analyser l'appropriation cognitive de la notion d'échelle, qui est fondamentalement liée à l'unidimensionalité de la mesure-longueur.

L'existence d'isomorphismes entre les trois niveaux

- du "signifiant" (les cartes)
- du "signifié" (les représentations à un certain niveau: mentales pour le sujet, mathématiques, sociales),
- et du "référent" (le territoire)

n'implique pas que la notion d'"unidimensionalité" de la longueur fonctionne de façon uniforme, selon que les invariants peuvent s'analyser à l'intérieur d'un seul niveau (notre expérience : celu des signifiants), ou entre niveaux (le cas des cartes géographique ou celui des plans...) (ce qui dépend a priori des isomorphismes ainsi mis en oeuvre).

Disons clairement que notre hypothèse est la suivante : l'élément décisif est ce qui se passe au niveau du signifié, c'est-à-dire au niveau des représentations du sujet, et c'est à ce niveau que portent nos conclusions sur l'appropriation du caractère unidimension nel de la mesure-longueur.

Cela nous conduit à faire l'hypothèse que les difficultés observée les évolutions, les discordances vont se retrouver dans les situations-problèmes mettant en action la notion d'"échelle".
D'autre part, l'intervention nécessaire de 2 isomorphismes référent/signifié et signifié/signifiant va interagir avec les opérations cognitives portant sur la "mesure-représentation". Enfin, le changement de domaine numérique va produire des difficultés particulières, contribuant à limiter le domaine de validité des acquis.

<u>1.2.Fiabilité du fonctionnement cognitif</u>

Pour étudier la fiabilité des réponses nous avons défini un "indic de fiabilité" dont nous avons regardé l'évolution selon les niveau scolaires.

a) Cet indice est défini comme suit :

- On calcule le pourcentage maximum des sujets qui pourraient faire des réponses complètement correctes aux 8 items, étant donné le pourcentage observé de réponses correctes aux 2 items pour chaque question Qj

$$\text{soit } Tmax = \operatorname{Inf}_{j}(Tcqj)$$

- On calcule le pourcentage de réussites correctes complètes qu'on pourrait attendre, en supposant que les sujets aient pour chaque Qj une probabilité de réponses correctes égale au taux de réussite observé (et que les réponses soient indépendantes).

$$Thas = \prod_{j=1}^{4} Tcqj$$

Si nous notons TCT le pourcentage observé de réponses correctes nous avons $Thas \leqslant TCT \leqslant Tmax$

Pour chaque niveau scolaire, nous pouvons exprimer TCT comme barycentre de Thas et Tmax, avec des coefficients α et β tels que $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, et $\alpha + \beta = 1$:

$$TCT = \alpha\, Thas + \beta\, Tmax$$

La résolution algébrique donne $\beta = \dfrac{TCT - Thas}{Tmax - Thas}$

(Elle n'a de sens que si $Thas \neq Tmax$, c'est à dire si $Tmax \neq 0$ ou 1: les questions de fiabilité n'ont plus de sens si les questions sont intégralement fausses ou correctes.)

La croissance de β observée peut être interprétée comme une amélioration de la fiabilité, à condition que ce ne soit pas un simple effet de la croissance du pourcentage de réponses correctes (par effet de la relation algébrique écrite plus haut).
Nous pouvons étudier le comportement théorique de β en fonction des paramètres TCT, Thas et Tmax dans le cas simplifié où la probabilité de réponse correcte est constante et vaut x: alors $Tmax = x$ et $Thas = x^4$.

Si nous notons t le paramètre TCT, nous avons

$$(t, x) = \frac{t - x^4}{x - x^4}$$

Cette fonction de $(0,1)^2$ dans $(0,1)$ est croissante en t, décroissante en x, discontinue pour $x=0$ et $x=1$. La surface $(t, x, \beta(t,x))$ qui représente β est telle que β y est croissante sur de nombreuses courbes pour $0 \leqslant x \leqslant x_0$ où x_0 est tel que $x - x^4$ est maximum. Donc la croissance observée pour β est a priori peu significative: nous allons donc définir un autre indice de fiabilité.

Soit le nouvel indice défini par

$$f(t,x) = 1-x+ x\ \beta\ (t,x)$$

qui est tel que si on se déplace sur la surface représentative de f on observe que $f(t,x)$ décroit sur un ensemble important de courbes, en particulier les courbes $x-t=u$ et $t=\lambda x$ (λ et u constantes): la croissance observée de f est donc a priori plus significative que la croissance observée de β.

Le tableau suivant donne l'évolution des différents paramètres et des deux indices β et f (valeurs observées) pour les 4 niveaux scolaires étudiés.

	CM_1	CM_2	6ème	5ème
T Has	20	17	41	44
T Max	56	53	73	78
TCT	26	29	55	67
β	0,17	0,33	0,44	0,68
f	0,54	0,63	0,59	0,71

Les deux indices β et f augmentent de façon distincte des taux de réponses correctes observés. Dans l'évolution de ces indices on peut remarquer l'exist nce d'un invariant: croissance entre le CM1 et le CM2, palier (relatif pour β) entre le CM2 et la 6°, croissance la plus forte entre 6° et 5°.

Le modèle linéaire apparait ainsi avoir un domaine de validité relatif si on prend en compte la fiabilité des réponses qu'il induit; de ce point de vue le domaine de validité s'étend de façon non régulière dans le cursus scolaire, et il faut attendre la classe de 5° pour pouvoir parler d'un modèle bien établi et fiable, dans des limites (notables) du domaine numérique dans lequel il s'applique: entiers ou inverses d'entiers petits pour les homothéties en jeu.

2. Les rapports entre mesures spatiales

Nous avons vu, dans l'analyse de la dimensionalité des mesures de longueur et de surface, que la mesure unidimensionnelle précédait - en ce qui concernait les acquisitions des élèves - la mesure bidimensionnelle ; dans une première étape, le "modèle linéaire" approprié à la mesure de longueur fonctionnait dans les tâches de prédiction des effets d'une homothétie simple (x2 ou x3) sur des formes géométriques.

Deux questions se posent : ce "modèle linéaire" est-il appliqué aux mesures de volume ? Quels rapports observe-t-on entre des réponses concernant les différentes mesures spatiales intervenant à propos d'un même objet.

2.1. Pour la première question, nous pouvons citer les réponses et un sondage accompagnant les questionnaires sur la dimensionalité de la longueur et de la surface, portant sur les effets de l'homothétrie sur le volume d'un cube puis d'une sphère ; nous renvoyons au travail rapporté par Vergnaud et al (1983) sur une étude plus spécifique concernant le volume.

En ce qui concerne les réponses correctes, les tableaux de réponse croisées des mêmes sujets d'une part pour la mesure du carré et du cube, d'autre part pour celle du disque et de la boule (après homothétrie du rapport 2) sont les suivants (CM1 - 5ème) (en pourcentage de sujets)

carré / cube	+	-	
+	24	02	27
-	64	09	73
	88	12	100

disque / boule	+	-	
+	2	0	2
-	36	62	98
	38	62	100

Pour le cube et la sphère les sujets avaient une réponse à choix multiple à donner qui proposait 4, 6, 7, 8, 9, 10 comme réponses possibles. Un tel choix permettait d'éventuelles réponses "au hasard" correctes (ce qui suffisait à expliquer l'existence des 2 sujets de la case "±").

Le tableau suivant, qui donne la distribution des réponses des élèves de 6ème, 5ème et 4ème et 3ème montre que certaines réponses ont été ajoutées : ce sont soit 2 (très rare), soit, pour le cube, un multiple de nombre de "petits" carrés sur un face du "grand" cube. (12, 20 ou 24).

Cube	N	+ (8)	4	12, 20 ou 24	6 ou 10	impairs	Ø et autres
6ème	22	7	3	5	4	1	2
5ème	24	12	2	1	6	2	1
4è/3è	34	27	1	-	4	1	1

Sphère	N	+ (8)	4	12, 20 ou 24	6 ou 10	impairs	Ø et autres
6ème	22	4	15	Ø	1	1	1
5ème	24	3	14	-	6	-	1
4ème	34	5	23	-	4	-	2

Nous remarquons que la dominante des réponses est de donner un multiple de 2 (le coefficient d'homothétie alors que notre choix de réponses ne leur proposait pas la réponse "linéaire". Pour la sphère c'est la plus petite réponse paire qui domine, mais les élèves de 5ème et 4ème donnent pour une part un ordre de grandeur meilleur (6, 8 ou 10).

Donc, à la fois les représentations spatiales font "décoller" du modèle linéaire, mais un rapport de multiplicité simple persiste entre les valeurs numériques proposées et le coefficient d'homothétie. Le passage du plan à l'espace semble bien comporter un élément qualitatif propre. Nous allons voir, avec l'analyse d'un problème mettant en jeu les 3 mesures spatiales, les relations qui existent entre longueurs, surfaces et volume pour un parallélépipède.

2.2.Une séance de la séquence didactique conduite, en 5ème, sur le volume (Vergnaud et al, 1983) concernait les rapports entre les 3 mesures : il s'agit du problème dit "de l'architecte" dont le texte suit :

"Vous êtes un groupe d'architectes et vous voulez construire un immeuble de 5.600 m² de surface de bureaux.
Votre groupe dispose d'un terrain rectangulaire de 35 m sur 16 m.
Est-ce que vous pouvez trouver la hauteur de l'immeuble sachant qu'un étage fait 3 mètres de haut ?
On veut vitrer toute la surface latérale de l'immeuble sur les 4 faces. Combien de surface de vitres extérieures faut-il acheter ?
On veut aussi mettre des baguettes d'aluminium sur toutes les arêtes de l'immeuble sauf celles de la base.
Quelle longueur de baguettes d'aluminium faut-il ?
Enfin, on veut mesurer le volume d'air de l'immeuble pour calculer la capacité de chauffage nécessaire.
Quel est son volume ?"

Chaque groupe résoud successivement les 4 questions du texte.
Après chaque question, le maître fait une mise en commun.
A la fin de la séance, on propose le problème avec un énoncé consistant simplement à substituer à la surface de base rectangulaire, une surface carrée de 20 m sur 20 m. Les élèves sont alor invités à faire <u>un pronostic individuel sur l'ordre de grandeur de différentes quantités dans cette nouvelle situation (plus grand, plus petit que ce qui a été trouvé pour le premier problème, ou égal) puis à faire les calculs effectifs</u>.

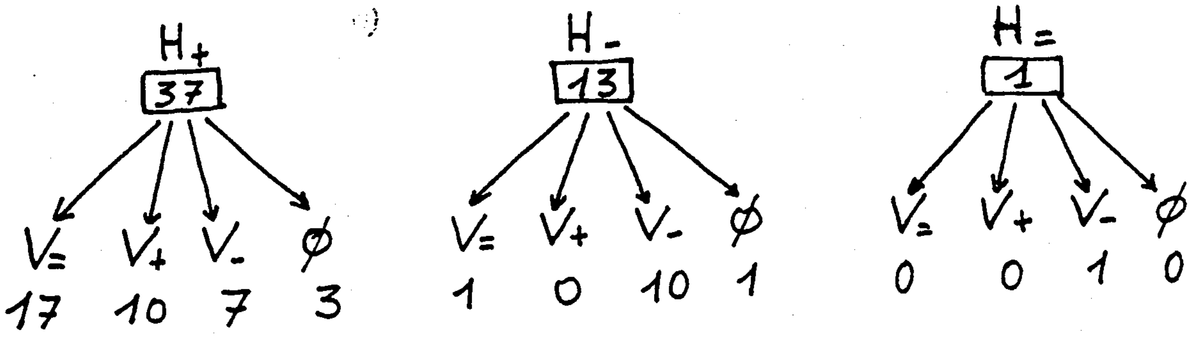
Nous allons analyser ici les réponses qui concernent la variation relative des mesures de longueur (hauteur), surface (latérale) longueur des arêtes, (volume global) pour les 2 classes que nous avons observées.

a) <u>Prévision sur la hauteur</u>

En fonction du problème précédemment traité au cours de la séance, les élèves peuvent conclure de la façon suivante :

"La surface de bureaux est constante, or la surface au sol est plus petite donc il faut une plus grande hauteur"-soit parce qu'il faut plus d'étages -soit parce que la surface de bureau constante implique le volume constant (V = surface bureaux x 3 m), et que si la surface de base est plus petite, la hauteur doit être plus grande (compensation qualitative issus de la relation V = S x H);
or les réponses spontanées fournies par les élèves semblent indiquer la présence de l'une ou l'autre de ces deux représentations des relations qualitatives hauteur/volume : en effet, sur 37 élèves qui estiment que la hauteur sera plus grande, seulement 17 estiment le volume inchangé...

Figure 1



Cependant, l'étude des protocoles d'observation recueillis dans les groupes indique que la hauteur fonctionne comme un "indice architectural" où la hauteur et le nombre d'étages sont indifférenciés.

b) Prévision des variations de la mesure des arêtes, la surface latérale et le volume

La classification des réponses des élèves a été faite comme suit :

covariation stricte : longueur (des arêtes), surface (latérale) et volume varient dans le même sens (ou sont toutes invariantes) ;

covariation large : il y a conservation de la mesure de l'une ou de 2 de ces quantités et covariation éventuelle des 2 autres ;

variations opposées : 2 des 3 quantités spatiales varient en sens inverse.

La figure 2 donne une représentation de l'ensemble des réponses des 51 élèves ayant participé à cette séance. Dans les codages de type + = + l'ordre des réponses est celui pour S, L, V (dans l'ordre du problème).

Les tableaux RSL, R_{LS} et R_{VL} donnent les pourcentages des couples de réponses (qualitatives, en termes de variations : "+" ou "-" ou d'invariance "=") pour chaque couple de mesures spatiales (calculés sur le nombre d'élèves ayant répondu aux deux questions en jeu).

Figure 2

Réponses pour la hauteur	51	H+	H-	H=
covariance stricte	24	=== 7 · +++ 5 · --- 4	=== 0 · +++ 0 · --- 7	--- 1
covariance large	17	=+= ++= 8 =1= · +=+ =++ ==+	=+= 2 · =-- 2	
variations opposées	6	+-= · --+ 1 · ++- =+- 3	+-- 1	
incomplet	4	++∅ +∅∅ 3	∅∅∅ 1	

Figure 3

V= V+ V- ∅ S= S+ S- ∅ L= L+ L- ∅		17 - 10 - 7 - 3 14 - 18 - 5 - 0 10 - 19 - 7 - 1	2 - 0 - 10 - 1 4 - 1 - 7 - 1 0 - 2 - 10 - 1	0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1
pourcentage moyen = + - ∅		37 42 17 4	15 8 69 8	ns

V \ S	+	=	–
+	13	6,5	2
=	15	26	-
–	6,5	6,5	24

$N = 46$

Tableau R_{SV}

L \ S	+	=	–
+	31	12,5	-
=	·2	18,8	-
–	4	6,2	25

$N = 48$

Tableau R_{SL}

V \ L	+	=	–
+	15	6,4	2
=	21,3	14,9	2
–	6,4	-	32

$N = 47$

Tableau R_{LV}

Les hypothèses spontanées des élèves apparaissent fortement liées à une représentation de covariation des différentes quantités spatiales attachées à un même élément (plus de 50 % de covariation strictes parmi les réponses complètes contre à peine 12 % d'hypothèses de variations opposées de 2 des quantités spatiales).

De plus, bien que la hauteur ait un statut ambigü, on observe globalement la dominance de covariations larges avec les autres quantités spatiales, ainsi que le montre la figure 3 qui donne les répartitions des réponses qualitatives correspondantes au volume, à la surface, aux longueurs d'arêtes, en fonction de la réponse sur la hauteur de l'immeuble.

Les tableaux de comparaison de réponses 2 à 2 pour la surface la longueur et le volume précisent que la relation la plus étroite concerne la surface latérale et la longueur des arêtes (75 % de covariation stricte) mais que la covariation dépasse toujours 60%.

2.3. La dominance de la représentation d'une covariation des mesures en contradiction avec leurs dimensionalités respectives, a des effets sur les procédures de calcul au moment de l'arithmétisation des longueurs, surfaces et volumes.

En effet, un problème de calcul des arêtes, de la surface et du volume d'une boîte parallélépipédique a été posé dans un ensemble de questions passé en prétest et en post test pour avoir une appréciation sur certains effets de la séquence (Rogalski et al, 1983).

Le tableau I donne le nombre de réponses correctes (207 élèves) pour le calcul du seul volume d'une pièce (salle de classe), le calcul de la 3ème dimension d'un objet parallélépipédique connaissant le volume et 2 dimensions, l'effet sur les volumes d'un rapport des longueur, largeur et hauteur, et enfin le calcul du volum la longueur d'arête et la surface d'un même objet parallélépipédique.

	N	pièce	3ème dim.	rapp.	V	L	S
pré-test	207	54	40	31	45	46	28
post-test	207	87	62	58	66	52	42

Tableau I

Une réponse est notée "correcte" si les calculs respectent la dimensionalité (on accepte les erreurs de calcul et/ou d'unicités)

On constate :

- d'une part que la surface est au prétest et reste au post test celle des mesures spatiales la moins bien maîtrisée ;

- d'autre part, qu'après la séquence sur le volume, l'amélioration des calculs de volume est bien meilleure si cette mesure n'est pas à coordonner avec les autres mesures spatiales sur un même objet.

Par ailleurs, l'analyse des erreurs rencontrées dans ce dernier cas montre que les confusions de dimensions dominantes sont celles qui consistent à attribuer à la surface (au niveau du calcul effectué) une mesure linéaire : cela concerne 30 % des erreurs au prétest, 20 % encore au post test (respectivement 18 et 12 %) de l'ensemble des réponses).

Enfin les erreurs sur le rapport sont très souvent des réponses à caractère "linéaire" (somme ou moyenne des rapports linéaires, Rogalski et al, 1983).

3. Conclusion

Les remarques que nous venons de faire apportent des éléments complémentaires quant à l'appropriation de la bidimensionalité de la surface :

- tout d'abord l'existence précoce d'un "modèle linéaire", renforcé - nous le verrons dans le chapitre sur l'enseignement - par le type de problèmes posés, conforte le caractère "unidimensionnel"initial de la mesure ; la présence simultanée sur une figure de la surface intérieure et du périmètre frontière induit comme "théorème-en-acte" la covariation de ces mesures, qu'il s'agisse de surfaces planes ou des surfaces limitant un solide ; la présence également simultanée pour un solide du volume-intérieur et de la surface-frontière ne contribue pas à éclaircir ultérieuremen le statut bidimensionnel de la mesure de surface : "le théorème-en-acte" de covariation n'est pas abandonné (1) en 5ème (voir les fig. 2 et 3 et les tableaux R).

---

(1) Si la différence de statut entre la mesure de longueur et celle de volume apparaît assez grande pour que les réponses issues d'un modèle unidimensionnel ne soient pas très résistantes à une contrainte de choix différents, le "théorème en acte" de la covariation reste présent, et est en contradiction avec des représentations dimensionnelles appropriées pour les différentes mesures spatiales.

L'appropriation de la bidimensionalité pour la mesure de surface se heurte donc à des obstacles importants, que l'on considère cette mesure dans le plan ou dans l'espace : à la fin de l'enseignement sur les mesures spatiales, ces obstacles n'ont pas été franchis par beaucoup d'élèves, et une part non négligeable n'a pas dépassé le modèle unidimensionnel dès lors que le recours au contrôle additif est absent.

PARTIE V

Analyse des effets macroscopiques de l'enseignement

1. Multiplication et produit cartésien 4

2. Repérge plan 9

3. Les mesures 11

4. Liens entre les divers domaines de l'enseignement sur la multiplication, le repérage plan et la mesure 19

5. Conclusion 20

6. Bibliographie, manuels consultés 22

ANALYSE DES EFFETS MACROSCOPIQUES DE L'ENSEIGNEMENT

Par effets macroscopiques, nous entendons la prise en compte de phénomènes globaux de l'enseignement, d'invariants dont il semble raisonnable de postuler l'existence à partir des éléments institutionnels que sont les programmes et les manuels. Il ne s'agit donc pas dans ce qui suit d'une analyse de situations didactiques, ni de l'observation de la conduite d'une classe sur les domaines qui nous intéressent avec des élèves dont nous étudierions par ailleurs les conduites.

Nous allons ici présenter un certain nombre de caractères que l'on trouve de façon dominante, sinon permanente, dans les manuels scolaires concernant le produit, le repérage plan, les mesures spatiales de surface. Si les programmes représentent davantage les intentions du législateur que la réalité dans les classes, les manuels - et en particulier ceux largement diffusés - apportent des informations à deux niveaux : d'une part ils réalisent les représentations que se font leurs auteurs (sur l'enseignement, son contenu, son ordonnancement dans le temps), d'autre part étant effectivement utilisés par les maîtres (de façon importante, en particulier dans l'enseignement obligatoire), on peut considérer qu'il y a une adéquation globale entre les manuels et l'enseignement effectif (1).

---

(1) Une étude de M. Kastenbaum (1983) sur l'enseignement donné sur la surface dans deux classes de CM2 par des enseignants différents, exprimant a priori des rapports différents avec les manuels, a montré l'existence d'invariants considérables au-delà des "traits de surface" constitués par le style propre à chacun des maîtres.
Nadine Bednarz (1984, séminaire didactique) signale le même phénomène (au Canada) pour l'enseignement de la numération.

(Le rôle en France de la centralisation et des fonctions du corps de l'inspection jusqu'à présent ne peut qu'accentuer ce phénomène) (1)

Pour avoir une idée un peu globale de l'enseignement des notions liées au produit, au repérage plan et aux mesures, nous avons effectué sur quelques points spécifiques un survol historique des manuels de l'enseignement primaire, à partir de l'époque où celui-ci est devenu un enseignement de masse, c'est-à-dire autour de 1850-1860 (2). Il ne s'agit pas d'une étude exhaustive - même pour la période récente - mais de sondages effectués en tenant compte des multiples réformes qui ont visé à modifier le système d'enseignement et ses contenus (3).
La comparaison de quelques manuels des mêmes auteurs avant et après une réforme tend à nous faire poser l'hypothèse que, au moins pour l'introduction des notions dites élémentaires dans l'enseignement primaire, la stabilité des choix fondamentaux et l'invariance de certaines caractéristiques de fond ont été davantage la règle que le changement de point de vue.. Toutefois, le mouvement qui a marqué les années 60-70, nous a conduit à distinguer deux périodes : avant la réforme des années soixante-dix, après cette réforme.

Nous allons décrire les invariants observés pour la multiplication

---

(1) Les innovations dues au travail dans les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) touchent le corps enseignant de façon numériquement marginale - à l'heure actuelle - et en particulier celui de l'enseignement élémentaire concerné par notre travail ; ils ne s'écartent pas nécessairement de certains invariants. Un manuel, qui commence à avoir une assez large diffusion (comme livre du maître ?) est plus atypique : ERMEL, issu des recherches à l'INRP.

(2) Selon les critères qu'on prend pour "enseignement de masse", et selon qu'on considère les garçons ou les filles...

(3) La liste des manuels consultés est donnée en annexe à ce chapitre.

et son rapport avec le produit cartésien, puis ceux concernant les repérages, ceux touchant à l'enseignement des mesures spatiales et plus particulièrement la surface ; en conclusion de ce chapitre nous indiquerons le rapport entre les invariants dégagés et les acquisitions des enfants dans le domaine de la dimensionalité.

1. - Multiplication et produit cartésien

1.1. Avant la réforme des années soixante-dix

Après une prise en compte de la définition "savante" de la multiplication en termes de proportion : "la multiplication est une opération dans laquelle étant donnés 2 nombres on en compose un troisième qui soit à l'égard du premier comme le second est à l'égard de l'unité" (F.P.B., 1842), la définition classique de la multiplication sera par la suite - pour le cours moyen où on "théorise" ces éléments - rattachée à l'addition: "La multiplication est une opération par laquelle on prend un nombre appelé multiplicande selon que l'indique un autre nombre appelé multiplicateur" (F.P.B. 1865), avec en note : "à proprement parler la multiplication n'est autre chose qu'une addition".

Cette représentation de la multiplication comme addition réitérée est un invariant à la fois au cours du temps (1) et dans les divers niveaux scolaires où elle est reprise. On la retrouve dans les livres d'arithmétique à l'usage des classes de 6ème, 5ème, 4ème ou 3ème (chez Hachette, Belin, Hatier, Editions de l'Ecole, Vuibert).

---

(1) On la retrouve pour la même série - éditeurs et/ou auteurs de 1860 à 1895 pour les manuels des frères des écoles Chrétiennes, puis ultérieurement dans ceux écrits par "une réunion de professeurs", aux mêmes éditions Mame, on la retrouve dans les éditions successives de Leysenne pour la période autour de 1900, elle est présente dans les différents manuels de l'enseignement primaire laïque après la réforme de 1919.

Avec cet invariant vont de pair un certain nombre de caractéristiques de l'enseignement de la multiplication :

- le multiplicande est un nombre "concret",
- le multiplicateur est un nombre "abstrait" (1) (sans "dimension").

Il est rarissime que la mesure des surfaces et volumes soit citée comme une exception à cette règle ; au contraire nombre de manuels insister sur le fait qu'on ne multiplie jamais par un nombre "concret", qu'il faut écrire 1 m² x 42 x 10 et non 10 m x 42 m ; le problème des rapports dimensionnels est parfois explicitement renvoyé à la notion de proportion (qui n'apparaît pas au niveau du CM) : "si la proportion avait lieu entre grandeurs concrètes (..) le mot produit n'aurait plus de sens".

Il faut signaler que ces choix sont distincts de ceux en cours aujourd'hui dans les manuels scolaires pour la mesure : on fixe l'unité, on travaille ensuite sur des nombres (la référence concret/abstrait n'est plus apparente dans l'enseignement de mathématique) ; dans les manuels d'avant la réforme on utilise bien des nombres "concrets" : on s'interdit la multiplication des dimensions.

Autre caractère lié au précédent : les problèmes posés sont toujours du type "isomorphisme de mesures" au sens de Vergnaud (   ) et jamais du type de "produit de mesures" : on connaît la valeur d'une certaine mesure pour une unité, on cherche la valeur de cette même mesure pour n unités.

A côté de ces invariants touchant au caractère dimensionnel de la multiplication, on peut relever des invariants concernant les rapports entre produits et organisation du plan : ainsi la commutativité est

---

(1) Dans la description d'un produit, quel qu'il soit, on donne toujours des noms à l'un des facteurs : ex. : files, lignes, rangées, colonnes et pour l'autre on parlera de "rang par file", "rangées par colonnes".

montrée comme une propriété de la multiplication à partir de la représentation spatiale du type suivant :

1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1

toujours donnée avec de petits nombres qui permettent de "voir" immédiatement le nombre d'unités par ligne ou par colonne.

La commutativité est rapidement utilisée dans les techniques opératoires ; elle pose problème dans la mesure où la multiplication est posée de façon tout à fait asymétrique. En revanche la distributivité (qui est asymétrique dans sa présentation) ne "nécessite" pas d'explication : cette propriété relative à l'addition et la multiplication fonctionne, au niveau du CM, comme un véritable " héorème en acte".

De plus, sur le plan de la "bidimensionalité" du produit, la remarque est presque toujours faite que si un facteur est multiplié par P le résulta est aussi multiplié par P ; toutefois la remarque sur l'effet de la multiplication par P d'un facteur et par 9 de l'autre facteur est très rare (nous ne l'avons rencontrée dans notre sondage que pour une question d'examen de BE dite d'arithmétique théorique..).

La raison d'être de la précision sur la multiplication par p d'un facteur est le passage de la multiplication des nombres entiers à la multiplication des décimaux.

L'algorithme fonctionne ensuite sans retour au sens et on ne rencontrera pas de problèmes liés au dénombrement d'un produit cartésien "quelconque" (1) .

---

(1) La "formule de la surface du rectangle ne se réfère pas à la multiplication du nombre d'unités mais au fait "additif" que l'on a x <u>carreaux</u> par rangées et y rangées dans le rectangle.

Donc l'enseignement avant la réforme des années soixante-dix "linéarise" complètement les problèmes de la multiplication, ne les met pas en rapport avec la combinatoire du produit cartésien pas plus qu'avec le produit des dimensions "physiques" ; il s'appuie sur le rôle producteu de l'organisation spatiale supposée acquise par les élèves (ce qui correspond bien à nos observations, dans l'étude du repérage plan) mais dans le cadre étroit d'une conception "application linéaire" du produit de nombre:

1.2. Après la réforme des années soixante-dix

Le mouvement de rénovation de l'enseignement des mathématiques a mis en avant les représentations ensemblistes : quel effet en est-il résulté sur l'objet d'enseignement "multiplication" ?

Tout d'abord le "produit cartésien" fait son entrée officielle comme objet d'enseignement, y compris dans les tables des matières de manuels de CE. Ensuite les "nombres concrets" opposés aux "nombres abstraits" disparaissent ; on met les unités en avant, on travaille ensuite sur les nombres : "nombres" et "grandeurs" sont distingués et la multiplication numérique retrouve un statut symétrique.

Dans les livres du maître elle est explicitement liée à la structure de produit cartésien ; ainsi, par exemple, Eiller et al (1980, Hachette) signale : "on notera toutefois que le nombre d'éléments de A x B est égal au produit du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de B".

Cependant dans la réalisation des séquences proposées et des manuels la structure de produit cartésien ne sera jamais, à ce niveau de l'enseignement élémentaire CE et CM (1 et 2), dissociée d'une représentation spatiale, le plus souvent en "matrice" lignes x colonnes. Eiller précise d'ailleurs explicitement que "le produit est le plus souvent représenté par un tableau à double entrée" et insiste sur les activités sur les tableaux et les rangements pour déboucher sur l'écriture multiplicative.

L'hypothèse de la "transparence" de la représentation spatiale va plus loin puisqu'il est signalé aussi que "la différence entre (a, b) et (b, a) se traduira d'une manière visuelle, qui est sans doute la plus accessible aux élèves". Dans les différents manuels, et dans ce qui en est transcrit dans des cahiers d'élèves, cela se traduit par l'écriture de chaque coordonnée d'un produit "homogène" par une couleur différente : la pertinence de cet indice "couleur" au problème spatial de repérage (et au problème de distinction de A x B et B x A qui motive la remarque) est loin d'apparaître aux élèves pour autant (nos observations sur le repérage "couleur" montrent bien l'occultation des indices non spatiaux lorsque la tâche est à juste titre identifiée par l'enfant à un travail sur l'espace).

La réalisation du produit par une disposition spatiale permet la "reconnaissance" que 3 x 5 et 5 x 3 donnent - par dénombrement des unités - le même résultat numérique ; elle est explicitement utilisée pour "montrer" également la distributivité de façon symétrique (ce qui est nouveau par rapport à l'enseignement antérieur).

Cette réalisation spatiale est privilégiée car elle répond à plusieurs attentes de l'enseignement : "il est facile d'illustrer rapidement des exemples numériques par des dispositions convenables d'ensembles de jetons et de quadrillages" et "l'emploi du schéma conserve au nombre son caractère abstrait". (H.J. Denisse, R. Polle, CE2, Livre du Maître, 1982, Delagrave).

Lorsque le produit cartésien de deux ensembles est explicitement présent, il s'agira toujours d'ensembles de types formes ou couleurs - qui ne sont donc pas associés à des dimensions physiques - représentés de manière spatiale, le plus souvent en tableau, parfois en "arbre".

Dans les exercices, le produit cartésien n'apparaît jamais en dehors de sa représentation en tableau avec marges ou associé à la représentation algorithmique en arbres ; les autres problèmes de CE2 et ceux ultérieurs de CM restent des problèmes "linéaires" d'où les produits de dimensions sont exclus. Le dénombrement du produit par sa représentation spatiale mis en avant avec de petits nombres cède très rapidement le pas au passage à l'algorithme de calcul. On ne trouve pas de travail sur les effets du produit pour l'un et/ou l'autre des facteurs : le caractère linéaire du produit reste dominant voire exclusif ; le caractère bilinéaire n'apparaît pas. L'"ancien", à savoir les acquis additifs de l'enseignement, et les "présupposés", à savoir les connaissances spatiales des élèves, ne sont en fait pas transformés.

Par rapport à la situation antérieure, la différence majeure est que l'invariant de la représentation spatiale a pris une importance beaucoup plus grande, ce qui est lié d'ailleurs à la part considérable faite aux questions des représentations symboliques (tableaux, schémas, graphes sagittaux, machines à opérer, etc.).

2 - REPERAGE PLAN

2. 1. Avant la réforme

Pour l'essentiel, rien dans les manuels de mathématique tout au moins. Il est possible que ,dans la grande place faite au 19ème au dessin, les activités de repérage aient eu une place. Dans les manuels sur les mathématiques à l'école primaire, les connaissances de la structuration spatiale en produit de dimensions horizontale/verticale (ou lignes/colonnes) sont supposées acquises par les élèves de CM puisqu'elles servent de support à la "démonstration" de propriétés numériques sur le produit.

2. 2. Après la réforme

Le repérage est une activité explicite dans les programmes, mais l'objectif visé ne concerne pas l'espace, lequel n'est là que comme support : "le repérage d'une case a d'abord un but très "pratique" : celui de familiariser les enfants avec la lecture d'un tableau à double entrée (..).

Sur le plan mathématique on s'en sert en particulier pour la représentation des relations (schéma cartésien)" ; pour les "noeuds" l'objectif est "de faire coder et décoder les noeuds d'un réseau à l'aide de couples formés essentiellement de 2 chiffres" (Eiller, p. 103). Un objectif intermédiaire est de faire distinguer l'ordre comme pertinent pour le couple : on passera ainsi de codages lettres/chiffres, à des codages chiffres couleur 1 / chif--res couleur 2 puis à un codage chiffre/chiffre avec toujours la même convention de représentation de (a, b).

Avec ce que nous avons vu sur les difficultés des enfants avec le produit homogène et la difficulté d'indexer de 2 façons un même ensemble fourni, on peut prédire que cette méthode "d'ostension", où un codage "horizontale/verticale" se transforme en codage "gauche/droite" présente d'énormes difficultés pour les élèves. En 6ème, voire au-delà, s'il est avéré que $(x, y) \neq (y, x)$, il n'est pas clair de repérer quel couple est (x, y) parmi les 2 points possibles (ce qui renforce les difficultés à différencier application et bijection...).

On peut remarquer par ailleurs que ces activités de repérage ne s'accompagnent jamais d'un dénombrement des cases ou des noeuds (liaison possible avec le domaine multiplicatif numérique) ni de changement de repère autres que l'homothétie (avec le même "point de vue") ou la translation (toujours avec le même point de vue).

Les problèmes spatiaux non réglés au CE (voir nos expériences sur les quadrillages) ne sont ainsi jamais abordés.

En fait, au cours de pratiquement toutes les activités proposées dans les manuels, l'espace est le micro-espace de la feuille de papier, convenablement placée selon l'horizontale et la verticale, avec un observateur qui ne changera jamais de point de vue. La fonction du repère : pouvoir être détachée du point de vue, n'est ainsi jamais (1) en jeu.

(1) dans notre échantillon des manuels.

3 - LES MESURES

Une première comparaison entre le contenu de l'enseignement obligatoire sur les mesures spatiales du CM à la 5ème et l'évolution des réponses des élèves peut permettre de situer les effets propres à cet enseignement dans un domaine cognitif où les premiers acquis sont précoces (et précèdent l'enseignement).

Rappelons qu'un premier enseignement débute en cours moyen, avec le noyau (en cours moyen deuxième année), constitué par le système métrique et les formules de calcul de la surface du rectangle, du carré, du triangle, et les premiers éléments concernant le volume. Une reprise, unique, a lieu dans l'enseignement secondaire : en 6ème pour la surface, en 5ème pour le volume où les formules du calcul prennent la place dominante dans les exercices demandés aux enfants.

La notion de dimensionalité des mesures n'est pas un objet pertinent pour l'enseignement institutionnel des mathématiques (elle n'est prise en compte de façon explicite que tard dans l'enseignement de la physique) ; néanmoins les rapports entre l'unidimensionalité des longueurs et la bidimensionalité des surfaces ne sont pas sans relation profonde avec les rapports entre structures additives et multiplicatives, structures qui sont - elles - au coeur de l'enseignement obligatoire.

Nous allons présenter des effets possibles de ces caractères de l'enseignement sur deux points : l'utilisation par les élèves d'un "modèle linéaire" et la difficulté à passer d'un traitement simplement additif des mesures spatiales au traitement multiplicatif approprié aux mesures de surface et de volume.

3.1. <u>Le modèle linéaire et son évolution</u>

Dans les problèmes concernant le périmètre de figures semblables (avec rapport entier) on a observé une évolution régulière des résultats d'ensemble, une diminution régulière du décalage entre les réponses concernant les figures "rectilignes" et celles pour les figures "curvilignes".

La fiabilité des réponses évolue cependant différemment. Les élèves de cours moyen 1 et 2 ont des patterns de réponses semblables, et la cohérence de leurs réponses est analogue et faible, cependant que les élèves du cycle d'observation répondent mieux et surtout de manière plus cohérente. La classe de 6ème apparaît là comme une classe "charnière" dans l'organisation de certaines notions concernant la longueur (cf. Produit de mesure : partie IV, annexe).

3. 1.1. Le contenu de l'enseignement sur les nombres nous semble influer sur le statut des représentations qui conduisent aux réponses correctes sur les longueurs et rendre, en partie, compte de ces évolutions contrastées.

Nous venons de voir que l'introduction de la multiplication se fait dans le cycle élémentaire (7-9 ans) au moyen de l'addition :
$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$ et que les problèmes ultérieurement posés dans le cycle moyen (9-11 ans) renforcent ce caractère additif de la multiplication.

Le cas le plus fréquent est celui que G. Vergnaud a appelé "isomorphisme de mesures" : à une mesure "a" correspond une mesure "b" (par exemple des kilos et des francs) le problème est de calculer b' correspondant à une autre mesure a'. Or des procédures "additives" sont très souvent valides pour résoudre ce type de problème : par exemple si 4 crayons valent 20 francs, 12 crayons = 4 + 4 + 4 crayons valent 20 + 20 + 20 = 60 francs... Ces procédures s'appuient sur le seul schème additif (et le caractère additif de l'isomorphisme de mesure) (1).

---

(1) Lors d'un bilan sur l'enseignement élémentaire aux Etats-Unis (N.A.E.P. 1980) le rapporteur écrit "at the most basic level, area is defined as the number of units, required to exactly cover a given region. Calculations of area by multiplying various linear dimensions of figures should be based on understanding that such operations are a short cut for finding the number units in a unit covering..." : il explicite aussi bien un fonctionnement régulier de notre propre enseignement qui "écrase" le domaine multiplicatif sur le domaine additif.

Notre hypothèse est que le modèle linéaire se trouve renforcé du fait de l'extension de son champ de validité dans les problèmes rencontrés ; cela produirait un double effet contradictoire : accroissement de l'efficacité et de la fiabilité de ce modèle et en même temps constitution en obstacle pour l'accès à un modèle multiplicatif, adapté aux quantités composées.

Cependant, dans le cycle d'observation du secondaire, ce type de problèmes devient beaucoup plus rare alors que des questions proprement numériques deviennent plus importantes, avec un travail de calcul sur les décimaux, sur les proportions numériques, qui fait fonctionner addition et multiplication comme deux opérations propres. Il nous semble que ce changement de perspective contribue à faire "décoller" les opérations multiplicatives des opérations additives, au moins pour un certain champ de problèmes.

Cela contribuerait à un affermissement opératoire des opérations multiplicatives dans le calcul du périmètre de l'homothétique d'une figure, d'où le changement de fiabilité observé : le modèle proprement "linéaire" $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ se distinguerait du simple modèle "additif" nécessitant des décompositions additives préalables (par exemple $f(n\,a) = f(a) + .. + f(a)$ car $na = a + a + .. + a$ (n fois).

3.1.2. L'usage par nos sujets du "modèle linéaire", tel que nous venons d'en décrire succintement le fonctionnement, ne s'identifie pas avec l'appropriation du concept d'unidimensionalité de la longueur.

Tout d'abord il n'est attesté que pour des rapports entiers pour lesquels l'additif et le linéaire ne se distinguent pas. Ensuite, sur le plan théorique, le modèle linéaire présenté plus haut : $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ n'exprime pas le rapport entre les dimensions a et f(a).

L'appropriation, constatée, du modèle linéaire permet des procédures algorithmiques de type suivant : "si à ℓ correspond $\mathcal{P}(\ell)$, alors à $(\ell \times n$

correspond $n \times \mathcal{P}(\ell)$," mais elle n'implique pas ipso facto la relation dimensionnelle dim ℓ = dim $\mathcal{P}(\ell)$.

Si nous utilisions les anciennes représentations symboliques encore en usage au cours du 19ème siècle pour les proportions, ce modèle linéaire se traduirait par
$\mathcal{P}(n \times \ell) : \mathcal{P}(\ell) :: n \times \ell : \ell \; (:: n : \ell)$ (rapport entre même dimensions), sans qu'on puisse nécessairement écrire $\mathcal{P}(n \times \ell) : n \times \ell :: \mathcal{P}(\ell) : \ell$ qui implique, dans le formalisme en question, que $\mathcal{P}(\ell)$ et ℓ soient de même dimension.

Remarquons que c'est cette deuxième écriture du rapport qui permet de considérer 2π, dans la formule du périmètre du cercle $p = 2\pi R$, comme un rapport numérique sans dimension (R étant un nombre quelconque).

Enfin, la mise en oeuvre efficace d'un modèle linéaire identique en certaines de ses conséquences à l'unidimensionalité de la longueur ne la constitue pas comme une propriété s'opposant à la pluridimensionalité des deux autres mesures spatiales. En témoigne tout d'abord le décalage des réponses correctes concernant la mesure de surface par rapport à celles de longueur ; en témoigne également le recours inapproprié au modèle linéaire pour la surface, voire pour le volume (Partie IV).

3.1.3. Nous avons vu que les élèves recourent au modèle linéaire dans des situations où l'organisation des figures est complexe (triangles difficiles à paver sans une certaine maîtrise géométrique) et dans des situations où le mode opératoire utilisé (le cm^2) se réfère à l'unité linéaire. Dans ce dernier cas le modèle linéaire peut être en contradiction avec le caractère additif de la mesure comme simple quantité, caractère attesté par ailleurs par les mêmes sujets. Bien entendu ce recours au modèle linéaire est massif lorsque les propriétés de la figure ne permettent pas de mise en oeuvre directe de l'additivité (le cercle par exemple).

Cet usage, erroné, d'un modèle linéaire disponible est d'ailleurs connu "depuis toujours" puisque Platon en fait, dans le Ménon, le support d'une de ses argumentations sur la nature de la connaissance...

3.2. Le rapport entre modèle linéaire et mesure

Or le modèle linéaire est issu des schèmes additifs, précoces, et il rejoint les caractères additifs de toute mesure, lorsque celle-ci est présentée comme une simple quantité - ce qui est bien la présentation initiale qui en est faite.

L'enseignement systématique en CM2 sur la surface semble porter son effet principal sur la prise en compte correcte de ce caractère additif. L'utilisation, dominante, du mode opératoire bidimensionnel lié aux unités cm2 et m2 n'est pas rattachée au caractère bidimensionnel de la mesure de surface : le cm2 est un pavé parmi d'autres dont on décompte le nombre. Quand la pavabilité n'est plus assurée, la mesure exprimée en nombres devient le résultat d'un calcul n'ayant guère acquis de sens par rapport à l'additivité initiale.

3.2.1. Il faut souligner deux faits :

D'une part l'enseignement a des difficultés à faire fonctionner la dialectique entre le caractère pragmatique de la forme, qui permet pavage et décompte additif, et le caractère conceptuel de l'unité, qui permet d'exprimer la mesure de figures non pavables et doit se dégager contre la forme. Le caractère de classe d'équivalence de l'unité est occulté par le passage immédiat au calcul (en ramenant par conservation ou partition les figures utilisées au rectangle lui-même pavable en carrés) ; très peu d'exercices proposent des mesures de figures par des unités distinctes équivalentes...

D'autre part le caractère de produit de la forme carrée de l'unité de surface attachée à l'unité linéaire est lui aussi occulté. Or la

transparence de l'opération qui consiste à aligner des bandes de cm2 pour couvrir les rectangles n'est qu'apparente. Si les unités n'étaient pas, à l'instar de la figure mesurée, un "produit" de deux segments de directions indépendantes, les formules multiplicatives n'apparaîtraient pas aussi simplement : il suffit d'essayer de construire ces formules à partir d'une unité triangulaire pavant des triangles... Une des réponses de Ewbank (1980) à propos des conceptions erronées de la surface représente nous semble-t-il cette occultation du rôle de la <u>forme</u> du cm2 dans le passage au calcul :
A la question "is the hectare like the acre, a square unit of area", Ewbank répond en effet : "there is nothing square about either of them ! Traditionally area has been mesured in square units because the square is the simplest shape that tessellates and accomodates easily to the rectilinears hapes lands, buildings, etc.. whose areas man needs to measure. The acre, originally the amount of land a joke of oxen could plough in a day, has no shape orientation".

3.2.2. La bidimensionalité des formules est elle-même également très peu exploitée. Rares sont les manuels, même considérés sur une longue période, qui construisent la formule S = a x b du calcul de la mesure du rectangle à partir de la proportionnalité par rapport à chaque côté ; tout aussi rares les utilisations réelles du caractère multiplicatif des formules ; celles-ci sont essentiellement, sinon exclusivement, utilisées pour leur statut algorithmique : la formule, par son expression en langue naturelle, ou sa représentation symbolique, détermine des opérations à effectuer : "chercher la longueur, chercher la largeur, effectuer leur produit".

Dans les problèmes les formules interviennent presque toujours dans la mise en oeuvre d'un calcul additif de la mesure d'une figure composée d'un nombre fini de figures de base.

Le caractère bidimensionnel d'une formule du type S = l x L n'est pas davantage exploité pour l'homogénéité des dimensions : il n'est donc pas étonnant de voir des élèves faire des calculs périmétriques, et de ne trouver sur une classe de 4ème (13-14 ans) que 16 élèves sur 27 calculant des surfaces par produit de longueurs (1)...

Dans ces conditions l'enseignement renforce les acquis liés aux premiers schèmes additifs, l'emploi du modèle "linéaire" si souvent validé par ailleurs. Il intervient sur la dimensionalité des surfaces essentiellement en élargissant le domaine de validité des opérations qui assurent le passage du pavage à l'expression de la mesure. La méconnaissance de la nature des difficultés conceptuelles dans ce domaine des mesures spatiales conduit l'enseignement à peu exploiter les "points d'ancrages" cognitifs qui existent, pas plus que les apports propres à l'arithmétisation.

L'utilisation des formules enseignées pour le périmètre et la surface des figures classiques (carré, rectangle, triangle, parallélogramme, cercle) prend très peu souvent pour objet de problèmes les rapports entre ces deux éléments simultanément présents : la mesure du bord (linéaire) et la mesure de l'intérieur (bidimensionnelle). Seuls quelques exercices demandent à l'enfant de comparer des figures isopérimétriques, ou au contraire de surface égale, mais (presque) toujours il s'agit de comparaison au sein d'une seule classe de figures : les rectangles.

Les variations relatives de ces mesures quand on fait varier les dimensions linéaires ne sont pas mieux prises en compte : les exercices portant sur les effets de similitudes sur le périmètre <u>et</u> la surface sont l'exception tout comme les calculs d'échelle, et les changements d'unité linéaire.

---

(1) La passation dans une classe de 4ème, sans particularités, de la question de l'enquête INRP (INRP, 1975) concernant la surface a confirmé les difficultés de la mesure de surface. Les obstacles rencontrés par les élèves dans l'utilisation d'une échelle de mesure recoupent les observations faites dans nos questionnaires à partir de similitudes.

3.3. Les questions d'arithmétisation

L'occultation du caractère intrinsèquement multiplicatif de la surface et du volume interagit avec l'arithmétisation.

En effet, les additions rencontrées dans l'enseignement mettent en jeu un petit nombre d'opérations, portant en général sur des nombres appartenant à une même "niche informationnelle" (Brousseau, 1979). Le résultat de ces opérations est lui-même un nombre qui ne sort que rarement de cette niche informationnelle, aux niveaux scolaires considérés ici.

Au contraire, la multiplication de 2, et a fortiori 3 nombres comme dans un calcul de surface ou de volume, se traduit fréquemment par un changement d'ordre de grandeur : qu'une feuille 21 x 29,7 contienne plus de 600 cm2 n'est pas si aisément représentable, qu'une boîte à chaussures contienne plus de 5 000 cm^3 paraît hors de proportion avec son encombrement linéaire.

L'arithmétisation de la mesure, non étayée par un travail sur les effets des caractères multiplicatifs, peut alors contribuer à la dénégation des conséquences de la bi ou tri-dimensionalité des mesures d'aire et de volume : bien des élèves jugent en effet de la pertinence de la formule choisie par la plausibilité de son résultat arithmétique (et l'existence d'un tel contrôle est positive quant au sens que les enfants attribuent à leur calcul) ; si ce résultat leur paraît peu plausible, pour les raisons énoncées ci-dessus en particulier, ils peuvent être conduits à rejeter une représentation bidimensionnelle ou tridimensionnelle en train de s'établir.

4 - LIENS ENTRE LES DIVERS DOMAINES DE L'ENSEIGNEMENT SUR LA MULTIPLICATION, LE REPERAGE PLAN ET LA MESURE

La caractéristique dominante est l'absence de liaison entre les divers domaines qui touchent à la bidimensionnalité, voire entre les différentes notions qui apparaissent dans un même chapitre. Ainsi les questions de repérage sont, nous l'avons vu, centrées sur la lecture de tableaux à double entrée ou sur le codage numérique de positions ; cependant les chapitres sur les quadrillages ne comportent pas de calcul sur le nombre de cases (reliable à celui des cas possibles dans un tableau à double entrée) ni sur le nombre de noeuds.

Le travail sur la multiplication utilise la disposition spatiale en produit mais celle-ci n'est pas mise en rapport avec le repérage : la donnée des "marges" pour remplir un "tableau cartésien" de type F x C est utilisée pour déterminer la tâche de construction ; son utilisation possible comme codage d'une case (et non moyen de produire une réponse) apparaît hors du champ de l'enseignement, tout autant que le dénombrement d'éléments d'une forme ou d'une couleur donnée (implicite pourtant dans l'expression du calcul multiplicatif).

La partie concernant l'enseignement de la mesure spatiale est elle-même découpée en séquences indépendantes : ainsi l'existence d'un rapport inverse entre unité et valeur numérique de la mesure est présentée mais elle n'est pas utilisée lors de la présentation des unités du système métrique et des changements d'unités.

La propriété 1 dm^2 = 100 cm^2, obtenue par la description du carré 10 x 10 en 10 cm^2 par ligne et 10 lignes, n'est pas mise en rapport avec le nombre de lignes et le nombre de colonnes (utilisée antérieurement pour définir le produit).

Les effets de la multiplication d'un nombre par 10 dans un produit sur la valeur du résultat ne sont pas davantage utilisés - même lorsqu'ils ont été présentés dans l'enseignement antérieur - pour justifier d'une autre façon le résultat de la mesure d'une surface en cm^2 connaissant celle en dm^2.

La distributivité de la multiplication - même "montrée" en s'appuyant sur une représentation spatiale en "carrelages" - n'est pas réinvestie pour mettre en avant la double linéarité de la mesure de surface par rapport à celle des longueurs. Ce découpage étanche se traduit également par ce paradoxe que le calcul du nombre de cm^2 dans un dm^2 précède le calcul de l'aire d'un rectangle et d'un carré, présenté comme un objet nouveau. En fait, l'objectif de ce dernier point est d'introduire l'algorithme multiplicatif $S = l \times L$; celui-ci est ultérieurement utilisé dans des calculs additifs d'aires complexes, mais sans relation avec les propriétés de la multiplication.

5. CONCLUSION

Si nous mettons en relation l'évolution des acquisitions des enfants sur la bidimensionalité et l'enseignement qui s'y rapporte (dans ce qui y est dominant depuis un peu plus d'un siècle) nous pouvons dégager un premier élément central : fondamentalement l'enseignement s'appuie sur des acquis antérieurs qui - sur le plan des notions liées à la bidimensionnalité - sont extérieurs au projet scolaire. Pour ce dernier, deux objectifs apparaissent dominants : faire acquérir des compétences sur la formulation et les représentations, faire fonctionner les algorithmes arithmétiques.

Les notions du champ conceptuel du produit cartésien de dimensions comme la forme et la couleur sont très partiellement introduites ; on s'appuie sur des acquisitions antérieures sur la bidimensionnalité de l'espace pour représenter le produit ensembliste mais sans utiliser les propriétés effectivement bidimensionnelles du plan ; les opérations liées au produit cartésien (projections et "relèvements", dénombrement des classes selon l'une ou l'autre projection, distributivité du produit ensembliste, complémentation, etc.) ne font pas l'objet d'une activité explicitement prévue par l'enseignement.

Les exercices, lorsqu'ils existent, sur le produit cartésien ne se dégagent pas du cadre de la représentation spatiale "matricielle" et sont très peu liés au travail numérique sur la multiplication.

Les problèmes de représentation spatiale, et du rôle de repérage bidimensionnel pour permettre l'identification de positions pour tout point de vue, ne sont pas pris en charge par l'enseignement, centré sur les questions de codage - donc de changement de représentation - sans changement de point de vue.

Au niveau de la multiplication arithmétique, les activités présentées dans l'introduction des notions et les problèmes proposés aux élèves renforcent le modèle additif ou linéaire (qui se ramène au précédent).

Tant dans la présentation générale de situations de multiplication en CE, que dans leur reprise en CM et dans l'introduction de la mesure des surfaces, l'aspect "produit de mesures" est totalement absent, voire explicitement évacué.

Les formules multiplicatives elles-mêmes jouent un rôle algorithmique, et ne sont pas exploitées du point de vue de la bidimensionalité.

Les acquisitions sur la dimensionalité faites par les enfants dans le cadre de leurs activités scolaires sont probables car des "objets" multiplicatifs sont effectivement manipulés, mais il nous semble s'agir là d'un produit "marginal" de l'enseignement qui n'en contrôle pas l'évolution qualitative ni quantitative, ni n'établit de rapports avec les objets explicites d'enseignement.

Bibliographie ; manuels consultés.

CHEVALLIER P.(sous la direction de) (1974) La scolarisation en France depuis un siècle. Colloque Grenoble 1968. Paris-La Haye, Mouton- P.U.F.

PROST A. (1968) Histoire de l'enseignement en France 1800-1967. ris, A.Colin, collection U.

Les manuels sont classés par ordre chronologique.

1804 LACROIX S.-F. Traité élémentaire d'arithmétique à l'usage de l'école centrale des quatre-nations, Paris, Courcier, (4°édition).

1805 TEDENAT M. Leçons élémentaires d'arithmétique et d'algèbre, Paris, Didot, (nouvelle édition).

1842 L.C., F.P.B. Nouveau traité d'arithmétique décimale, Paris-Tours, Mame et Cie-Poussiègue-Durand, (31°édition).

1845 LAVAUX P.-A. Traité d'arithmétique, à l'usage des ENP, des EPS, et des pensions, Paris, Bachelier.

1860 F.P.B. Nouveau traité d'arithmétique décimale , Paris-Tours, Mame et Vve Poussièlgue, (48°édition, autres éditions consultées: 1872, 1887)

1865 F.P.B. Nouveau traité d'arithmétique décimale, livre du maitre, Paris-Tours, Mame et Vve Poussièlgue.

1878 LEYSSENNE P. La deuxième année d'arithmétique (CEP), Paris, A. Colin, (8°édition).

1888 LEYSSENNE P. La deuxième année d'arithmétique, à l'usage des écoles commerciales, des pensionnats de demoiselles et des candidats au CEP, Paris, A.Colin, (77°édition; 85°édition en 1899).

1890 AUVERT U. Arithmétique et système métrique, cours moyen, Paris, Gedalge Jeune, (12° ou 15°édition).

1891 LEYSSENNE P., BOUSQUET A. Exercices et problèmes d'arithmétique de première année, Paris, A.Colin, (29°édition).

1895 F.J.J. Nouveau traité d'arithmétique décimale, Paris-Tours, Mame et fils-Ch.Poussièlgue.

1900 F.J. Eléments d'arithmétique, cours de mathématiques élémentaires, Paris-Tours, Mame et fils-Ch.Poussièlgue.

1900 XXX Nouveau cours simultané d'études primaires, cours moyen, Paris, Hatier.

1902 LEYSSENNE P. Problèmes de troisième année, Paris, A.Colin, (2°édition).

1906 LEYSSENNE P. La deuxième année d'arithmétique, à l'usage de l'enseignement primaire, des écoles commerciales et des candidats au CEP, Paris, A.Colin, (75°édition).

1908 ALIX J., BAZENANT L. Arithmétique et système métrique, cours moyen et supérieur, Paris, bibliothèque d'éducation.

1910 LEMOINE A., AYMARD A. La théorie arithmétique au brevet élémentaire et au concours d'admission aux E.N., Paris, Pauli et Cie.

1916 LEYSSENNE P. Nouveau cours d'arithmétique, cours supérieur, première année, Paris, A.Colin.

1919 LEYSSENNE P. Nouveau cours d'arithmétique,CE 1° et 2° année, Paris, A.Colin, (16°édition).

1919 LEYSSENNE P., BOUSQUET E. Exercices et problèmes de première année, Paris, A.Colin, (75°édition).

1923 LAISANT C.-A. Initiation mathématique, Paris, Hachette, (2°édition).

1923 LEMOINE A. Arithmétique, cours élémentaire et moyen, Paris, Hachette, (10°édition).

1923 MINET A., PATIN L. Cours pratique d'arithmétique, cours élémentaire, 1° et 2° année, Paris, Nathan, (nouvelle édition).

1927 CAMMAN Arithmétique du brevet élémentaire, Paris, de Gigord.

1930 Une réunion de professeurs. Arithmétique, cours moyen et supérieur, Paris-Tours, Mame et fils- de Gigord, (refonte du n°153, édition 1931).

1930 MORTREUX X. et O. Nouvelle arithmétique des écoles primaires, cours élémentaire nouveau, Paris, Belin, (11°édition).

1932 HATTEMER R. Cours d'arithmétique, à l'usage de la classe de 8°, La Chapelle-Montligen.

1932 CHENEVRIER P. Précis d'arithmétique à l'usage des classes de 6°, 5°, 4° et 3°, Paris, Hachette.

1933 MORTREUX X. et O. *Arithmétique pratique et raisonnée (CE)*, Paris, Belin, (51°édition).

1934 LECOMTE G. *Arithmétique à l'usage des classes de 6° et de 5°*, Paris, Belin, (5°édition).

1934 DELFAUD M., MILLET A. *Arithmétique, cours élémentaire et moyen*, Paris, Hachette.

1936 CHATELET A. *Arithmétique, cours moyen, classes de 8° et 7° des lycées et collèges, CEP*, Paris, Bourrelier et Cie, (4°édition).

1936 MORTREUX X. et O. *Nouvelle arithmétique des écoles primaires, CEP et cours supérieur*, Paris, Belin, (15°édition).

1936 MORTREUX X. et O. *Arithmétique, algèbre et géométrie, cours supérieur et cours complémentaires*, Paris, Belin.

1937 CROISILLE G. *Arithmétique. Système métrique. Géométrie (CE, 9° et 10° des lycées et collèges)*. Paris, Martinet(ed.).

1938 MARIJON A., DESFORGE J. *Arithmétique, à l'usage des élèves de 6°, année préparatoire des E.P.S.*, Paris, Hatier, (2°édition).

1938 Un groupe de professeurs. *Arithmétique à l'usage des élèves de 5°, 4° et 3°*. Paris, Editions de l'Ecole.

1942 BENOIT A. *Arithmétique, classes de 5° classique et moderne*. Paris, Vuibert.

1946 COURTET B., GRILL C. *Arithmétique, cours moyen, classes de 8° et 7°*. Paris, Editions de l'école, (9°édition).

1949 VASSORT L.et M. *Le calcul vivant, CE 1° année*. Paris, Hachette.

1962 BRANDICOURT R. et S. *Le chemin du calcul, CE 1°année*. Paris, Bourrelier.

1965 PICARD M., RENUCCI R. *Le calcul quotidien, CE 1°année ou 10° des lycées*. Paris, Nathan.

1974 TOUYAROT M.-A., HAMEAU C. *Itinéraire mathématique, CM1*. Paris, Nathan.

1977 IREM-Poitiers *La multiplication, propositions de travail pour un CE1*. Poitiers, I.R.E.M.

1979 HEFFE P., LEDE R., CONSTANS B. *Activités mathématiques, CE*. Paris, Nathan.

1980 DAUBET M. (sous la direction de) *Bati-Math, CP*. Paris, Magnard.

1980 EILLER R. et coll. *Math et calcul, CE2, livre du maitre*. Paris, Hachette.

1980 HEFFE P., LEDE R., CONSTANS B. *Activités mathématiques, CM1*. Paris, Nathan.

1981 MERIGOT M. (sous la direction de) *Calculer, mesurer, résoudre. CM1*. Paris, Nathan.

1982 DENISE H.-J., POLLE R. *Math CE2*. Paris, Delagrave.

1982 DENISE H.-J., POLLE R. *Math CM1*. Paris, Delagrave.

1983 DENISE H.-j., POLLE R. *Livre du maitre*. Paris, Delagrave.

1983 ERMEL *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CP, CE, CM)*. Paris, SERMAP, OCDL, (éditions de 1977 à 1983 selon niveau).

1984 THEVENT S. *Découvrir et calculer, Math CE2*. Paris, Bordas.

CONCLUSION

ET

PERSPECTIVES

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Avant de résumer nos résultats d'ensemble obtenus sur l'acquisition de la bidimensionalité dans les trois champs conceptuels de la combinatoire ensembliste, du repérage plan et des mesures spatiales, nous allons revenir brièvement sur les rapports entre notre perspective d'étude et les travaux de psychologie génétique dans les mêmes domaines.

1. Le travail sur les classifications multiples développé à partir des études de Piaget d'une part s'est placé dans le cadre général du développement de la logique de l'enfant et de l'adolescent, d'autre part - plus récemment - s'est orienté plutôt vers une étude approfondie des procédures des jeunes enfants.

Les conclusions globales que nous avons pu tirer de nos recherches sur l'acquisition convergent ici avec les analyses de Piaget ; en particulier nous pouvons souligner que les âges des sujets dont les protocoles illustrent les stades décrits par Piaget sont très stables et que ce sont, globalement, ceux que nous avons dégagés comme étapes dans l'évolution. Remarquons néanmoins que la validité de nos résultats nous paraît liée à des caractéristiques "dimensionnelles" du matériel utilisé : les représentations des enfants ne sont pas les mêmes pour des produits hétérogènes de dimensions comme F x C et pour des produits homogènes de type C x C ou F x F ; cela nous a conduit à détailler davantage le processus d'évolution des représentations et l'acquisition de la bidimensionalité, au-delà de l'approche centrée sur la logique.

D'autre part, les classifications n'abordent pas l'ensemble des opérations attachées à un produit cartésien ensembliste mais concernent l'existence et la coordination des projections sur chaque ensemble de base, et les relations d'équivalence qui leur sont attachées, au sein d'une inscription dans un cadre spatial qui joue un rôle producteur spécifique.

Or deux types de situations-problèmes utilisées dans notre travail ne se situent pas dans ce cadre et ont apporté des éléments complémentaires. Ces derniers nous permettent - nous semble-t-il - de préciser davantage les représentations que se construisent les enfants sur une période relativement longue : il s'agit d'une part des tâches numériques de dénombrement d'éléments construits ou d'anticipation sur des modifications des ensembles de base, d'autre part des tâches de mise en correspondance de produits ensemblistes. Les premières tâches nous paraissent même susceptibles d'être réinvesties dans la construction de situations didactiques visant l'acquisition des notions attachées au produit cartésien ensembliste. Les seconds types de tâches ont permis de montrer les limites de la formation d'hypothèses stables, au long d'une correspondance, mobiles par rapport aux dimensions en jeu et bidimensionnelles ; cette formation d'hypothèse concerne un niveau de fonctionnement de la bidimensionalité postérieur à celui en jeu dans les classifications multiples.

Par contre, l'étude approfondie des procédures de jeunes enfants dans des tâches de complétion de "matrices", avec en particulier la mise à l'épreuve de modèles précis de "règles de production" (Anh Ngyen Xuan et al, 1983) affine les connaissances sur la période antérieure à l'acquisition de la bidimensionalité. Il s'agit là d'une période sur laquelle nous avons peu développé notre propre travail (sinon pour rechercher comment la double contrainte d'unicité et d'exhaustivité était traitée dans une solution ensembliste de construction de produits de type F̀ x C ou C x C).

Soulignons d'ailleurs l'importance de connaissances dans ce domaine pour la construction de situations didactiques destinées à introduire des concepts sur le produit auprès de jeunes enfants.

De même, il n'entrait pas dans notre perspective de travail d'étudier sur le plan génétique la construction des "dimensions" elles-mêmes, en rapport avec l'ensemble des activités socio-cognitives des enfants ; mais nous insistons sur le fait que les résultats de telles recherches concernent directement la détermination du domaine de validité de nos conclusions, et ce en particulier dans la période de construction du premier niveau de fonctionnement de la bidimensionalité.

Dans le domaine spatial, nous avons retenu un aspect très spécifique de l'analyse des acquisitions: ous avons étudié le passage à la bidimensionalité du repérage (dans un "plan quadrillé") à partir des acquis antérieurs de l'enfant sur les propriétés spatiales et de ses rapports ave son espace visuo-moteur (éloignement par rapport à soi, relation droite-gauche). Nous avons trouvé des résultats convergeant avec les autres travaux sur le repérage et sur les acquis sur la représentation de l'espace ; nous avons également observé une interaction des diverses propriétés utilisées par les enfants conduisant à une prise en compte précoce de la bidimensionalité du repérage (dans des conditions sur lesquelles nous reviendrons à propos du domaine de validité des conclusions sur la bidimensionalité).

De plus, la comparaison d'un repérage purement spatial, d'un repérage où des identifications intrinsèques de position sont possibles, et de l'identification de points d'un repère par une information non spatiale (couple de couleurs) nous a permis de distinguer les difficultés à coordonner deux informations (4;6 ans) les simples non-prises en compte spontanées d'informations non spatiales, dans une tâche reconnue par l'enfant comme spatiale. Rappelons ici que nous n'avons pas étudié la construction par l'enfant d'un système de repérage : cette situation est beaucoup plus complexe et Piaget a montré le caractère relativement tardif de sa réussite. Une telle construction en effet met en oeuvre beaucoup plus de notions que celle de la bidimensionalité, dont celles - difficiles - liées à la mesure ; elle fait logiquement appel à des outils élaborés, comme la construction de l'orthogonalité (repérage cartésien) ou le report des angles (coordonnées polaires) (Piaget, 1948).

Enfin notre situation de repérage où le sujet et l'expérimentateur ont chacun leur propre point de vue, par rapport à des repères "isomorphes", semble faciliter la prise en compte du point de vue de l'observateur dans le repérage. En particulier l'orientation gauche/droite apparaît mieux conservée que dans les expériences où le sujet est placé face à deux repères. L'exploitation des changements de point de vue avec observateur ne nous semble pas avoir été faite sur des tâches de repérage plan.

Cette situation a confirmé les difficultés, mises en évidence par tous les auteurs, de prise en compte des changements de point de vue dans l'espace (et non dans le "plan marqué") : cela montre que le système de repérage n'a pas nécessairement la fonctionalité qui lui est implicitement supposée, et que les tâches de repérage plan ne peuvent être étudiées sans mise en rapport avec l'ensemble des représentations spatiales de l'enfant.

En particulier le type de réponses apportées dans la situation où l'expérimentateur avec son repère était face au sujet semble bien indiquer que l'enfant plutôt que de composer les relations spatiales planes "loin/près" et "droite/gauche" essaie de "compenser" le déplacement de l'expérimentateur en se "mettant mentalement" à sa place.

Ceci expliquerait que les tâches de changement de point de vue ne s'intègrent pas dans une classification en termes de stades et que l'acquisition de la bidimensionalité ne puisse assurer la réussite dans ce genre de situations.

Enfin, nous devons rappeler que les recherches en psychologie sur les mesures spatiales sont essentiellement centrées sur les conservations, dans le cadre de l'épistémologie génétique. Les difficultés que nous avons observées de prise en compte de la bidimensionalité de la mesure de surface, comme l'application erronée d'un "modèle linéaire" à la surface (au lieu du modèle bilinéaire approprié) sont analogues aux confusions entre conservation du périmètre et de la surface (Vinh Bang, 1965) pour ne citer que l'exemple le plus flagrant de la convergence de notre approche avec celles évoquées ci-dessus. En revanche, les éléments de notre travail qui prennent en compte la dimension de l'enseignement ne se retrouvent pas dans les travaux antérieurs, en particulier tout ce qui concerne la validité des opérations des enfants selon les différentes figures, objets de mesure.

2. Dans l'ensemble de notre étude sur l'acquisition de la bidimensionalité, nous avons mis l'accent essentiel sur la recherche d'invariants dans l'élaboration des représentations. Cela nous a paru nécessaire pour deux raisons que nous rappelons. Une étude des caractères de l'intervention (ou la non-intervention) de l'enseignement dans le domaine du produit cartésien nécessite de disposer de repères sur le développement des acquisitions cognitives des élèves. L'organisation de situations didactiques sur la longue période de construction cognitive (confirmée par l'étude des trois champs conceptuels considérés) suppose également de connaître les caractéristiques générales des élaborations cognitives des enfants et de leurs transformations. Dans cette perspective, nous avons pris en compte comme essentiels les contenus, vus sous l'angle de l'objet de savoir en jeu, en insistant sur l'importance des domaines de validité.
Il nous paraît y avoir complémentarité, et convergence d'intérêts, entre cette approche et celle des travaux de psychologie cognitive qui s'attachent aux pratiques opératoires elles-mêmes pour étudier "non pas (ou pas directement) l'élaboration progressive des instruments cognitifs chez l'enfant, mais les conditions et les modalités de la mise en oeuvre de ces instruments..." pour "contribuer à une pragmatique de la connaissance (et à sa théorie)..", cela impliquant une "reconsidération générale des notions de schéma et de structure, la structure étant cette fois définie non par les produits intrinsèques des instruments cognitifs (..) mais par les conditions formelles assurant la compatibilité, la modulation, la composition et la convertibilité des pratiques observées" (Gréco, 1984).

3. Nous allons maintenant résumer les conclusions spécifiques que nous avons obtenues sur l'acquisition de la bidimensionalité. Pour fixer les idées nous avons rapporté cette acquisition à des niveaux d'âge (qui recoupent, rappelons-le, des niveaux scolaires). Il doit être bien clair qu'il s'agit d'éléments essentiellement indicatifs.

A 4 ans, les enfants rencontrent des difficultés - relatives - à tenir compte de façon stable de deux informations simples (repérage des carrefours) mais il y a des acquis précurseurs dans le domaine spatial ; ainsi par exemple, la disponibilité du repérage proximal/distal permet déjà une prise en compte non négligeable de la deuxième dimension.

A 5 ans, le seul obstacle qui subsiste dans la mise en oeuvre de la bidimensionalité du repérage plan est celui de la conservation de l'orientation gauche/droite ; en ce qui concerne la combinatoire ensembliste, il apparaît une contradiction entre la contrainte d'unicité (liée au caractère ensembliste du matériel à construire) et l'exhaustivité (liée à la combinatoire elle-même).

A 6 ans, la bidimensionalité spatiale est acquise, et les enfants peuvent assez bien compenser un changement limité de point de vue (dans l'utilisation d'un repère). Le statut ensembliste du produit semble assuré ; on peut mobiliser, séparément, les projections sur chacun des ensembles de base dans des tâches simples (rangements) mais les "relèvements" ne sont pas disponibles. Les opérations sont exclusivement unidimensionnelles, avec une forte asymétrie qui peut aller jusqu'à l'inaccessibilité d'une des dimensions, selon la signification du matériel.

A 7 ans, il commence à y avoir des règles d'arrêt: le produit est une solution, unique, à certaines problèmes. La représentation du produit semble de type "additif", une dimension reste relativement dominante, mais pas de manière absolument stable ; les comportements restent unidimensionnels.

A 8 ans se produit un processus de réorganisation des représentations du produit de dimensions conduisant des représentations de type additif à celles de type multiplicatif ; le fait que les anticipations des effets d'adjonction d'éléments aux ensembles de base soient mobilisables nous en semble un indice très intéressant. Ce processus se traduit aussi, nous semble-t-il, par d'apparentes régressions pour certaines réponses. De plus, l'espace joue un rôle producteur. Cependant le domaine de validité des opérations bidimensionnelles est limité.

A 9-10 ans, la bidimensionnalité du produit ensembliste est acquise, le produit homogène E x E n'est plus mis en rapport avec l'ensemble $\mathcal{P}$(E) mais traité de manière similaire à un produit hétérogène A x B. Dans des opérations complexes comme les mises en correspondance de produit, les enfants peuvent maintenant faire des hypothèses unidimensionnelles stables, pour l'une et l'autre des dimensions, successivement. Toutefois la coordination multiplicative de ces hypothèses reste difficile.

A 10-12 ans, les acquis sur la bidimensionalité de la mesure de surface s'établissent ; le pavage des figures rectangulaires en fournit une première base, qui n'assure pas néanmoins une disponibilité de la notion même pour les formes structurées multiplicativement (rectangles, parallélogrammes).

De la 6ème à la 4ème alors que la linéarité de la mesure des longueurs est utilisée de façon fiable, la bidimensionalité de la mesure de surface garde un domaine de validité limité, bien que s'étendant lentement à des formes comme les triangles. La structuration des situations-problèmes, les modes opératoires utilisés pour exprimer la mesure, interviennent dans la disponibilité de la bidimensionalité. Faute de pratiques "spontanées" à ce niveau de fonctionnement des mesures spatiales, faute d'une intervention appropriée de l'enseignement, beaucoup d'élèves ne parviennent pas à s'approprier la mesure de surface comme une opération bidimensionnelle valide sur toute (bonne) forme plane.

Globalement, dans une certaine mesure, l'espace apparaît comme un précurseur dans la construction de la bidimensionalité : la richesse de ses propriétés, la précocité des représentations des enfants construites à partir de leurs activités manuelles et motrices dans l'espace, en sont une des raisons. En particulier le privilège de la dimension proximal/distal (loin/près par rapport à soi, devant/derrière par rapport à des objets orientés) fournit une organisation unidimensionnelle. Le plan apparaît un référent privilégié pour la représentation de la bidimensionalité en tant qu'objectivement organisé de façon bidimensionnelle.

4. Cela étant, l'évolution de l'acquisition de la bidimensionalité se confirme non seulement comme un processus de longue durée, mais encore comme marquée par des niveaux de fonctionnement différents. Dans cette évolution apparaissent des obstacles dans le passage de l'unidimensionalité à la bidimensionalité. Ces obstacles se distinguent des difficultés tenant à la réalisation matérielle, au statut des ensembles de base, aux moyens de contrôle plus ou moins accessibles, etc. Ils se manifestent par l'existence de régression dans certaines performances et surtout par le caractère récurrent de certains problèmes ; ainsi peut-on retrouver beaucoup plus tard (éventuellement chez des adultes) la trace de tels obstacles par des erreurs qui peuvent sembler paradoxales.

Il apparaît tout d'abord l'obstacle que nous qualifierons de logique, au sens Piagétien, du passage au domaine multiplicatif. Cet obstacle a son versant arithmétique dans le problème du passage des structures additives aux structures multiplicatives, que l'enseignement, comme nous l'avons vu, a plutôt tendance à renforcer. L'une des conséquences à long terme est la représentation de la multiplication comme une opération qui "donne des nombres plus grands" (et la division comme une opération qui donne des nombres plus petits)(1).

---

(1) On retrouve ainsi des problèmes dans la mise en oeuvre de la proportionalité au niveau de la seconde quand les coefficients sont inférieurs à 1 .

Un autre aspect de cet obstacle est lié au changement d'ordre de grandeur, en rapport avec la représentation du domaine numérique, où seul un domaine restreint est utilisé. Or le passage de l'unidimensionnel au bidimensionnel se traduit par un changement d'ordre de grandeur dès que les cardinaux des ensembles de base ou les mesures des longueurs ne sont pas trop petits. Nous n'avons délibérément pas manipulé cette variable numérique dans nos expériences, mais nous avons rencontré cet obstacle dans l'arithmétisation du volume (Vergnaud et al, 1983, Rogalski et al 1983) et dans les rapports entre nombre et espace chez des élèves de 6ème et de 5ème (Errecalde et Rogalski, 1984).

Un autre type d'obstacle se rencontre dans l'acquisition de la dimensionalité des diverses mesures spatiales : c'est la mise en relation entre dimensions physiques composées (surface, volume, au-delà masse volumique, etc.) et dimensions composantes. Ces problèmes liés à l'analyse dimensionnelle, se retrouvent jusque dans l'enseignement supérieur.

L'étude de ces derniers obstacles n'a pas été développée dans notre travail : leur analyse est un des prolongements possibles de l'étude de l'acquisition la bidimensionalité. Nous voulons signaler maintenant d'autres limites de sur la portée de nos conclusions, et avancer un certain nombre de questions encore ouvertes.

5. Nous avons déjà fait référence à la limitation de nos expériences à des cardinaux petits, ne serait-ce qu'à cause de l'âge des plus jeunes enfants avec lesquels nous avons travaillé. Or, outre le problème du changement d'ordre de grandeur évoqué ci-dessus, se pose la question de l'extension de nos conclusions à des ensembles quelconques. Au-delà des questions de domaine de validité numérique, c'est alors l'opération même de produit qui est en jeu et non son résultat direct ; cela suppose un changement de point de vue qui impliquerait un changement de méthodologie.(1)

---

(1) Si les ensembles sont quelconques, finis très grands, ou non finis, les réalisations matérielles ne sont plus possibles. Les représentations symboliques et/ou l'expression des modes de construction sont alors indispensables.

Par ailleurs, nous avons rappelé plus haut que nous n'avions pas manipulé la variable "nature des dimensions" ; mais nous n'avons pas non plus étudié les effets des différences entre "critère", "attribut", "dimension" (cf. annexe sur la dimension). Nous estimons cependant, à partir des résultats déjà acquis en psychologie, que ce sont des variables propres à modifier les règles d'action voire les représentations des sujets : il y a là des investigations à poursuivre.

Dans un autre ordre d'idée, nous avions déjà signalé dans le chapitre concernant les objectifs et la méthodologie, qu'il nous paraissait indispensable d'analyser un large éventail de tâches liées à chacun des champs conceptuels concernés. Comme pour le produit cartésien et le repérage, vu l'âge des enfants, cela ne pouvait être fait qu'en entretiens individuels (en tout cas en-dessous du CM) cela nous a conduit à une limitation du nombre des enfants observés sur chaque tâche (pour un âge donné). C'est la cohérence d'ensemble des résultats obtenus dans chacun des domaines qui, à notre avis, permet de juger de la validité de ces résultats. Nous n'avons en particulier pas développé une analyse statistique fine ; de plus nous ne voyons pas quelles hypothèses initiales permettraient à l'étape actuelle de construire un modèle théorique adéquat, donnant un sens à une telle analyse statistique, vu les concepts en jeu. La régularité de nos résultats (au sens d'une répétabilité suffisante) est néanmoins une question que nous considérons comme ouverte.

De plus, nous avons pratiquement toujours associé l'âge et le niveau scolaire des enfants considérés (sauf pour l'étude sur la surface, où nous avons pris des classes entières).

Or, l'âge correspond à une maturation de l'enfant sur différents plans, et à un certain temps passé à des activités "spontanées" plausibles - mais inconnues - dans les champs conceptuels considérés (constitution et manipulation de "dimensions" comme la couleur, la forme, la texture..., représentations de l'espace issues des manipulations et des déplacements..., comparaisons d'objets selon leur taille, etc.). La classe correspond à un temps d'activités scolaires "contrôlées" a priori par l'enseignement mais pour lesquelles on ne connaît pas pour autant l'investissement propre de l'élève. Ces activités d'enseignement reprennent pour certaines d'entre elles des notions correspondant également à une acquisition "spontanée".

Notre choix identifie donc ces deux "temps" et cela comporte a priori une contre partie : l'accentuation des évolutions, par la sélection effectuée (de fait) à partir du CE par les passages d'une classe à l'autre. Cela nous conduit à une remarque complémentaire ; nous n'avons pas pris en compte l'origine sociale des enfants. Cependant dans la mesure où nous avons très peu joué sur l'usage des représentations (pas plus que celui des verbalisations) mais au contraire centré nos questions sur la production d'actions, nous ne pensons pas avoir biaisé nos analyses par cette non-prise en considération. Néanmoins, l'étude des différents chemins cognitifs à travers les invariants d'ensemble que nous avons dégagés affinerait l'analyse des acquisitions dans les champs conceptuels concernés.

Rappelons d'autre part que nous avons distingué à plusieurs reprises la disponibilité et la mobilisation possible d'une notion ; nous avons supposé que c'était la disponibilité qui attestait le mieux l'appropriation. Nos résultats vont effectivement dans ce sens. Cependant, et c'est pourquoi il y a encore question ouverte, nous n'avons pas posé à un même sujet une variété telle de questions sur une même notion particulière que cela constitue une justification expérimentale de la différence et de la hiérarchie des caractères "disponible" et "mobilisable" d'une notion ou opération cognitive.

Par ailleurs, nous avons utilisé surtout des situations "ouvertes" dans lesquelles l'enfant n'avait pas de contrôle sur ses productions (autre que les opérations mêmes qu'il avait effectué) : nous considérons, en effet, qu'une des caractéristiques de l'appropriation était la possibilité pour le sujet d'organiser lui-même la situation proposée et de faire des hypothèses sur son traitement. Cela reste néanmoins une prise de position théorique qui peut se discuter.

Enfin, parmi les autres questions ouvertes, nous pensons que les systèmes de représentation (et en particulier le système "additif" et le système "multiplicatif") peuvent coexister. Selon la nature des tâches (domaine de référence, dimensions utilisées, valeurs numériques éventuellement manipulées, nature des objets, etc.,) et leur complexité cognitive, l'enfant, l'adolescent ou l'adulte vont tirer leurs règles d'action de l'un ou l'autre de ces systèmes, voire partiellement - si ce n'est contradictoirement - de l'un et de l'autre. Ainsi, par exemple, des adultes "cultivés" peuvent penser que l'effet d'une homothétie de rapport 2 sur un volume se traduit par la multiplication de la mesure initiale par un nombre qui peut être 4 ou un peu plus grand - réponse non linéaire - sans arriver pour autant à la réponse tridimensionnelle appropriée, ici 8. Cette question rejoint celle de l'existence des registres de fonctionnement étudiée par Vermersch (Vermersch, 1976).

6. Nonobstant ces questions ouvertes, on peut avancer, à partir des résultats obtenus, un certain nombre de conséquences ou d'hypothèses didactiques.

Ce qui ressort de l'analyse de l'enseignement est que celui-ci s'est surtout adapté aux acquisitions cognitives générales, non spécifiquement scolaires, des élèves plus qu'il n'est intervenu pour les construire - d'où, a posteriori, la pertinence pour la didactique d'une étude précise des acquisitions des enfants dans les domaines concernés.

Or le temps long des acquisitions sur la bidimensionalité, à partir de l'unidimensionalité, attesté par l'ensemble des résultats, conduit à postuler que l'enseignement devrait intervenir ; mais à notre sens seule une intervention organisée sur une longue durée pourrait produire des effets (modifier la rapidité et/ou l'ordre des acquisitions). Cependant nous n'avons pu nous livrer qu'à des hypothèses, appuyées sur nos conceptions quant au développement des connaissances et sur les travaux développés en didactique des mathématiques.

Les hypothèses obtenues sur l'évolution des acquisitions, et l'analyse de l'intervention de l'enseignement actuel conduisent à mettre en avant quelques points clés;

Tout d'abord, le rôle producteur que joue le plan dans la structuration bidimensionnelle doit pouvoir être exploité; il conviendrait de s'appuyer pour cela sur la connaissance des acquis cognitifs de l'enfant pour pouvoir faire fonctionner en temps opportun la dialectique "ancien/nouveau". L'objectif serait alors de construire des situations qui exigent la constitution de nouvelles connaissances ou d'objets nouveaux, dans le domaine du produit, tout en s'appuyant sur les propriétés des relations spatiales que les enfants peuvent déjà utiliser.

Ensuite, l'utilisation d'un "jeu de cadres" entre le domaine spatial, la combinatoire ensembliste et le domaine arithmétique devrait contribuer à la construction de conceptions plus opératoires dans le champ des structures multiplicatives. Un objectif décisif serait de donner un statut fonctionnel spécifique au produit, dépassant son point de départ additif et ouvrant en particulier sur une autre représentation qu'algorithmique des formules multiplicatives des mesures spatiales.

Par ailleurs, dans le domaine de l'espace la mathématisation doit être un outil de connaissance: une utilisation fonctionnelle des repères cartésiens (à partir de ceux, simples, constitués par des quadrillages finis) lors de changements de point de vue apparait tout à fait nécessaire, si l'on se réfère aux obstacles non surmontés alors que la bidimensionalité commence à être fonctionnelle. La constitution de meilleures représentations des changements de point de vue dans l'espace, qui pourrait ainsi être construite, permettrait peut-être ultérieurement aux étudiants de buter moins contre l'obstacle des changements de repère en mécanique.

De façon générale, nous avons signalé dans l'analyse de l'enseignement la coupure existant entre des champs conceptuels pourtant en interaction. A contrario, il nous paraitrait important de rétablir la dialectique entre les différentes notions des différents champs conceptuels concernés par la bidimensionalité.

Nous avons déjà souligné à plusieurs reprises la nécessité de faire intervenir le domaine numérique (que nous n'avons pas étudié à cette étape de notre travail, mais qui est le point essentiel dans l'enseignement) en rapport avec les problèmes de dimensionalité des repérages ou de la combinatoire.

D'autres domaines, peu ou pas pris en charge par l'enseignement élémentaire ou même obligatoire, sont également en relation avec les acquisitions sur la bidimensionalité. Nous avons déjà rappelé les rapports avec les "équations aux dimensions" de la physique. La"combinatoire des possibles", dans le champ conceptuel des probabilités, est également en rapport étroit avec le produit ensembliste; le plus souvent il intervient d'ailleurs des produits de type ExE dont nous avons souligné la spécificité..

A un autre niveau, enfin, le travail de constitution d'hypothèses fait également partie de la formation scientifique, un des objectifs généraux de l'enseignement. Les analyses des épreuves de correspondances entre produits ont indiqué la multiplicité des problèmes qui interviennent dans cet autre domaine de mise en oeuvre de la bidimensionalité (pour nous limiter au premier niveau qualitatif de difficulté).

Il est évident que ces remarques ouvrent la perspective de tout un champ de recherches aussi bien sur les appropriations cognitives des enfants et des adolescents que sur l'élaboration et l'organisation de situations didactiques,concernant non seulement la didactique des mathématiques mais aussi la didactique de la physique, dans une orientation de travail interdisciplinaire.

BIBLIOGRAPHIE

ACREDOLO L.P. (1981) Small and large-scale spatial concepts in infancy and childhood. In Spatial representation and behavior across the life span,(LIBEN L.S., PATTERSEN A.H., NEWCOMBE N. eds). New-York, Academic-Press.

BACHELARD G. (1938) La formation de l'esprit scientifique. Paris, Vrin.(nouvelle édition 1975).

BALACHEFF N. (1982) Preuve et démonstration en mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, vol 3.3., 261-304.

BARDIES B. (de), O'REGAN K. (1973) What children do in spite of adults' hypothesis. Nature. vol 248, n°5434, 531-534.

BASTIEN C., OLIVERA A. (de), PINELLI P.-M. (1982) Un conflit d'ordre: l'organisation du produit de deux ensembles. Enfance, n°1-2, 10-14.

BAUDONNIERE P.-M. (1976) Etude génétique de localisation dans un cadre de références: le role du nombre d'éléments. XXI° congrès international de psychologie, Paris.

BAUDONNIERE P.-M. (1979) Etude génétique des systèmes de référence spatiaux: le role de la position relative des cadres de référence. L'année psychologique, 79, 363-378.

BAUDONNIERE P.-M. (1981) Etude génétique des systèmes de référence spatiaux dans deux tâches de reproduction. L'année psychologique, 81, 309-328.

BAUDONNIERE P.-M., CASTELO R. (1978) Inluence de différents apprentissages sur la différenciation perceptive des jeunes enfants. L'année psychologique, 78, 331-347.

BEDNARZ N. (1984) La construction d'un système de représentation du nombre par l'enfant, significatif et opérant. Séminaire national de didactique des mathématiques, Paris.

BERTHOUD M. (1972) La localisation spatiale chez les enfants d'age préscolaire, Thèse de 3° cycle, Paris, Université René Descartes.

BERTHOUD M. (1973) Développement d'une stratégie opératoire pour le repérage spatial. Enfance, 1-2, 109-126.

BERTHOUD M. (1973)a. Les systèmes de références spatiales et leur interaction chez les enfants d'âge préscolaire. I Le degré de contrainte des données perceptives. L'année psychologique,73, 23-36. II Analyse des facteurs structuraux. L'année psychologique, 73, 109-126.

BESSOT A., RICHARD F. (1977) Commande des variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement des procédures. Thèse de 3°cycle, Bordeaux.

BIDEAUD J., LAUTREY J. (1983) De la résolution empirique à la résolution logique de l'inclusion: évolution des réponses en fonction de l'âge et des situations expérimentales. Cahiers de psychologie cognitive, 3, 3, 293-326.

BODIN A. (1980) Lecture comparée de deux études sur les structures multiplicatives.Rapports D.E.A.,30-40. Université L.Pasteur, Strasbourg.

BODIN A.(1981) Mise au point d'un questionnaire;observations,entretiens de binômes et individuels. Rapport de D.E.A. I.R.E.M., Besançon.

BRESSON F. (1971) La genèse des propriétés des objets. Journal de psychologie normale et pathologique, 2, 143-168.

BRESSON F., CHOMBART DE LAUWE P.-H., CULLEN M., GUILBAUD G.Th., PAILLARD J., de RENZI E., VURPILLOT E. (1974) De l'espace corporel à l'espace écologique,Paris, P.U.F.

BROWN A.L. (1970) The stability of dimensional preference following oddity training. Journal of experimental child psychology,9, 239-252.

BROUSSEAU G.(1977) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique, I.R.E.M. Bordeaux.

BROUSSEAU G.(1979) Etude de situations (théorie des situations didactiques), I.R.E.M. Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques, vol 1.1., 11-59.

BROUSSEAU G. (1980,a) L'échec et le contrat. Recherches, la politique de l'ignorance, 41, 177-182.

BROUSSEAU G. (1981) Problèmes de l'enseignement des décimaux. Recherches en didactique des mathématiques, vol 2.1., 37-128.

BROUSSEAU G. (1983) Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques. Journal fur Mathematik

Didactik.

CHEVALLARD Y. (1980) *La transposition didactique*, cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques (Chamrousse).

CHEVALLARD Y., JOSHUA M.-A. (1982) Un exemple d'analyse de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 3.2., 157-240.

CHEVALLARD Y. (1983)a. *Remarques sur la notion de contrat didactique*. Aix-Marseille, I.R.E.M.

CHEVALLARD Y. (1983) b. *Emploi at analyse du contrat didactique dans l'enseignement des premières notions d'analyse*. Aix-Marseille, I.R.E.M.

CLOSSET J.-L. (1983) *Le raisonnement séquentiel en électrocinétique*. Thèse, Université Paris VII.

DAMEROW P. (1979) Zur Rehabilitierung des Rechnens mit benannten Zahlen. *Mathematica Didactica*, vol2.2., 82-92.

DOISE W., MUGNY G. (1981) *Le développement social de l'intelligence*. Paris, Inter-éditions.

DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu*. Paris, Cédic.

DOUADY R. (1980) Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 1.1., 77-111.

DOUADY R. (1983) *Rapport enseignement apprentissage: dialectique outil-objet, jeux de cadres*. Paris-Sud, I.R.E.M.

DOUADY R. (1984) *Didactique des mathématiques*. Encyclopaedia universalis. Paris, Encyclopedia Universalis France.

DOUADY R., PERRIN M.-J. (1983) *Mesure des longueurs et des aires*. Université Paris VII, I.R.E.M.

ESCARABAJAL M.-C. (1983) *Reformulation: quels problèmes l'enfant croit-il résoudre?* Séminaire Développement cognitif et didactique, Paris.

EWBANK W.A. (1980) Some popular misconceptions about the metric system ans about metrication. *The Illinois Mathematics Teacher*, 31, n 2, 16-20.

GLAESER G. (1978-1980) *Cours de 3°cycle de didactique des mathématiques*. Université L. Pasteur, Strasbourg.

GRECO P. (1984) Pratiques opératoires, in Travaux du centre d'étude des processus cognitifs et du langage, C.N.R.S.- E.H.E.S.S., Paris.

GRECO P. (1984) Conservations: homogénéité et hiérarchie des performances. Une étude à propos des décalages. in Psychologie développementale: problèmes et réalités (Hommage à P.Oléron). Bruxelles, Mardaga.

GRECO P. (à paraitre) Enfance (opérations intellectuelles) Encyclopaedia Universalis. Paris, Encyclopedia Universalis France.

GRECO P. (à paraitre) Didactique des mathématiques. Encyclopaedia Universalis. Paris, Encyclopedia Universalis France.

HALE G.A., GREEN R.Z. (1976) Attention to stimulus components with variation in relative salience of components and degree of stimulus integration. Journal of experimental child psychology, 21, 446-459.

HALFORD G.S., MAC DONALD C. (1977) Children's pattern construction as a function of age and complexity.Child development, 48, 1096-1100.

HELLA F, BAUDONNIERE P.-M., PECHEUX M.-G. (1977) Méthode d'apprentissage appliquée à l'étude de la localisation dans un cadre de référence chez des enfants d'âge préscolaire. Mémoire, Université René Descartes, Paris.

HIRSTEIN J.J., LAMB C.E., OSBORNE A.R. (1978) Students misconceptions about area mesure. Arithmetics Teacher, 6, 10-16.

HOCK H.S., HILTON T. (1979) Spatial coding and oblique discrimination by children. Journal of experimental child psychology, 27.

I.N.R.P. (1977) Enquête sur l'enseignement des mathématiques a l'école élémentaire. I.N.R.P.

INHELDER B., SINCLAIR H., BOVET M. (1974) Apprentissages et structures de la connaissance, Paris, P.U.F.

JAULIN-MANNONI F.(1965) Les quatre opérations de base des mathématiques, Paris, E.S.F.

KAGAN J., LENKIN J. (1961) Form, color and size and children's conceptual behavior. Child development, 32, 25-28.

KASTENBAUM M. (1983) Analyse comparée de deux enseignements en CM2 sur la mesure des aires. Séminaire "développement cognitif et didactiques", Paris, C.E.P.C.L., E.H.E.S.S.

KEMLER D.G. (1982) The ability for dimensional analysis in preschool and retarded children: evidence from comparison, conservation and prediction tasks. Journal of experimental child psychology, 34, n°3, 469-489.

KENDLER H.H., D'AMATO M.F. (1955) A comparison of reversal shifts and nonreversal shifts in human concept formation. Journal of experimental psychology, 49, 165-174.

KENDLER T. S., KENDLER H.H. (1959) Reversal and non-reversal shift in kindergarten children. Journal of experimental psychology, 58, 56-60.

KULA W. (1984) Les mesures et les hommes. Paris, Editions de la maison des sciences de l'homme.

LABORDE C. (1982) Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique. Thèse, Université Scientifique et médicale-I.N.P., Grenoble.

LAFLAQUIERE A. (1979) Etude génétique de conduites de classification sur des critères représentatifs. Enfance, n°1, 15-30.

LAURENDEAU M., PINARD A.(1957) Les premières notions spatiales de l'enfant, Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

LAUTREY J., BIDEAUD J. (1984) De la résolution empirique à la résolution logique du problème d'inclusion: apprentissage et différences individuelles. Actes du 2°colloque de l'Association pour la recherche cognitive, Paris, 312-329.

LEBESGUE H. (1975) La mesure des grandeurs. Paris, Blanchard (réimpression, articles originaux: bulletin de l'enseignement mathématique, 1931-1935).

LEE S. (1984) Etude génétique du repérage et de la représentation d'un déplacement simple de l'objet chez l'enfant de 4 à 6 ans. Thèse 3°cycle, E.H.E.S.S.

LEPECQ J.-C. (1982) Référentiels spatiaux et espace des positions chez le jeune enfant. Thèse de 3°cycle, Université Paris V.

LEPINE D. (1965) La réponse "pareil" chez l'enfant: identité ou équivalence? L'année psychologique, 1, 57-76.

LEPINE D. (1966) Critères de la réponse d'"identité" chez l'enfant. L'année psychologique, 2, 417-446.

LEPINE D. (1969-1970) Information positive et information négative dans l'apprentissage de concepts unidimensionnels simples. Bulletin de psychologie, 279-280, XXIII, n°1-3, 50-55.

LERMAN I.C., GRAS R., ROSTAN H. (1980) Elaboration et évaluation d'un graphe d'implication pour des données binaires. Publication IRISA n 136, Rennes.

LONGEOT F. (1978) Les stades opératoires de Piaget et les facteurs de l'intelligence. Grenoble, P.U.F.

LURCAT L. (1976) L'enfant et l'espace, le role du corps, Paris, P.U.F.

MEYER E. (1935) La représentation des relations spatiales chez l'enfant. Cahiers de pédagogie expérimentale et de psychologie de l'enfant, n°8.

MAURY L. (1966) Approche génétique de la notion de complément logique. Journal de psycchologie normale et pathologique,n 3,329-342.

MAURY L. (1969) L'acquisition de la notion de complément logique. Contribution à l'étude de la genèse des structures logiques élémentaires. Thèse de 3° cycle, E.H.E.S.S. Paris.

MAURY L. (1976) Aspects génétiques de la transposition de trajets. Le travail humain, 39, 73-86.

MAURY L. (1977) Transposition et représentation de trajets par des séquences d'images chez les enfants de 5 à 6 ans. L'année psychologique, 2/77, 365-382.

MAURY L. (1981) Acitivités spatiales chez l'enfant et le bébé. Psychologie française, 24, 281-288.

MAURY L., PORRO E., ROGALSKI J. (1974-75) Autour d'une étude génétique sur la négation conjonctive. Bulletin de psychologie, 314, XXVIII,213-223.

MAURY L., ROGALSKI J. (1979) Filiation dans le développement cognitif: décalages, courbes en "U" et disparitions. Bulletin de psychologie, 340, XXXII, 533-538.

MELKMAN R., KORIAT A., PARDO K. (1976) Preference for color and form in prescoolers as related to color and form differences. Child development, 47, n°4.

MITCHELMORE M.C. (1980) Three dimensional geometry drawing in three cultures. Educational Studies in

Mathematics, 11, n 2, 205-216.

MUGNY G., DOISE W., PERRET-CLERMONT A.-N. (1975-1976) Conflit de centrations et progrès cognitif. Bulletin de psychologie, 29, 199-204.

MUGNY G., GIROUD J.-C., DOISE W. (1978-1979) Conflit de centrations et progrès cognitif II: nouvelles illustrations expérimentales. Bulletin de psychologie, 32, 979-985.

N.A.E.P. (1980) Results and implications of the second N.A.E.P. mathematics assessment elementary school. Arithmetics Teacher, 27, n 8.

NGYEN XUAN A., CAUZINILLE-MARMECHE E., FREY L., MATHIEU J., ROUSSEAU J. (1983) Fonctionnement cognitif et classification multiple chez l'enfant de 4 à 7 ans, Paris, éditions du C.N.R.S.

OLSON D.R., HILDYARD A. (1977) On the mental representation of oblique orientation. Canadian journal of psychology, 29, 1.

PECHEUX M.-G. (1970) Etude génétique de la reproduction graphique de figures géométriques simples, isolées ou associées. L'année psychologique, 70, 2, 407-423.

PECHEUX M.-G., BAUDONNIERE P.-M., CARLIG D. (1979) La copie de figures complexes en fonction d'une échelle de mesure chez l'enfant. Cahiers de psychologie, 22, 119-128.

PECHEUX M.-G., BAUDONNIERE P.-M., TARANNE P. (1981) Ocular strategies of young children and adults in two memorization tasks. International journal of behavioral development, 4, 237-254.

PERRET-CLERMONT A.-N. (1979) La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale. Bern, Peter Lang.

PIAGET J. (1949-1950) Introduction à l'épistémologie génétique, tomes I, II, III. Paris, P.U.F.

PIAGET J., INHELDER B. (1941) Le développement des quantités physiques chez l'enfant, Paris, Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

PIAGET J., INHELDER B. (1948) La représentation de l'espace chez l'enfant, Paris, P.U.F.

PIAGET J., INHELDER B. (1959) La genèse des structures logiques élémentaires, Paris-Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A. (1948) La géométrie spontanée de l'enfant, Paris, P.U.F.

PIAGET J., SZEMINSKA A. (1941) La genèse du nombre chez l'enfant, Paris-Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

PIAGET J. (sous la direction de) (1967) Logique et connaissance scientifique, Encyclopédie de la Pléiade, Paris, Gallimard.

PIERAUT-LE BONNIEC G. (1972) Recherche sur l'évolution génétique des opérations de classification. Archives de psychologie, XLI, 162, 89-117.

PIERAUT-LE BONNIEC G. (1977) Développement des capacités d'abstraction chez le jeune enfant entre 2;0 et 5;0. Archives de psychologie, XLV, 175, 205-223.

PIERAUT- LE BONNIEC G., SCHONEN S. (de) (1976). Etude génétique d'activités sémiotiques. Utilisation de marques et de traces chez l'enfant de 2 à 5 ans. I Utilisation du marquage d'un objet. L'année psychologique, 76, 55-77. II Utilisation de traces laissées par une activité. L'année psychologique, 76, 401-416.

PINARD A. (1975) Note sur la compatibilité des notions de stade et de décalage dans la théorie de Piaget. Psychologie canadienne. vol. 16, 4.

PINELLI M.-P. (1978) Le produit cartésien et les enfants du cours préparatoire. Thèse de 3°cycle, Université de Provence.

PINOL-DOURIEZ M. (1975) La construction de l'espace, Paris-Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

PLATON Menon, Traduction et notes par Cambry, Paris, Garnier-Flammarion, 1967, 345-352.

REVUZ A. (19) Est-il impossible d'enseigner les mathématiques?. Paris, P.U.F., L'éducateur.

RIEBEN L., de RIBAUDIERRE A., LAUTREY J. (1983) Le développement opératoire de l'enfant entre 6 et 12 ans Paris, éditions du C.N.R.S.

RICCO G. (1982) Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. Educational Studies in Mathematics. 13, 3.

RICCO G., ROUCHIER A. (1981) Mesure du volume: difficultés et enseignement dans les premières années de l'enseignement secondaire. Actes du 5 colloque du groupe *international P.M.E.* Grenoble.

RICCO G., VERGNAUD G., ROUCHIER A. (1983) Représentation du volume et arithmétisation- entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.1., 27-70.

RICHARD J-F. (1974) *Attention et apprentissage*, Paris, P.U.F.

ROBERT A. (1982) *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*. Thèse, Université Paris VII.

ROGALSKI J. (1970) *Analyse de la structure opératoire que présente pour l'enfant un matériel d'expérience défini par deux dimensions: évolution génétique*. Centre d'étude des processus cognitifs et du langage, Paris.

ROGALSKI J. (1979) Quantités physiques et structures numériques. *Bulletin A.P.M.E.P.*, n 320, 563-586.

ROGALSKI J. (1981) Acquisition de la notion de dimension des mesures spatiales de longueur et surface. *Actes du 5 colloque du groupe international P.M.E*. Grenoble.

ROGALSKI J., SAMURCAY R., RICCO G. (1983) Analyse d'un prétest-posttest sur le volume. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4.1., 121-131.

ROGALSKI J., VERGNAUD G. (1983) Etudes en didactique des mathématiques; un exemple: les recherches sur les structures multiplicatives et sur l'acquisition des mesures spatiales (surface,volume).In:*Pour réussir l'enseignement des mathématiques*, Etudes et recherches, Paris, S.N.E.S.

ROST J. (1984) Les théories de la mémoire sémantique en réseau et leurs implications pour l'enseignement de la physique. in *Recherches en didactique de la physique: les actes du premier atelier international*. C.N.R.S., Paris.

ROUCHIER A. (1980) Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1.2., 225-275.

SAINT-PRIX M. (1983) Etude de problèmes liès aux référentiels dans la lecture de l'image chez les enfants de 15 mois à 4 ans. Thèse 3°cycle, E.H.E.S.S.

SALTIEL E. (1978) *Concepts cinématiques et raisonnement naturel: étude de la compréhension des changements de référentiels galiléens par les étudiants en science*. Thèse, Université Paris VII.

SAMURÇAY R. (1984) La coordination des points de vue dans l'espace chez l'enfant: analyse des référentiels et des calculs spatiaux. Thèse de 3°cycle, E.H.E.S.S.

SAUVY J. et S. ((1972) L'enfant à la découverte de l'espace, Paris, Casterman/Poche.

SAUVY J. et S. (1974) L'enfant et les géométries, Paris, Casterman.

SCHONEN S.(de) (1974) Etude de la lecture des représentations bidimensionnelles statiques de l'espace en perspective projective chez les enfants de 2;6 à 4;5 ans. Archives de Psychologie, 42, 167-168, 287-310.

SMITH L.S., BARON J.(1981) Individual differencies in the classification of stimuli by dimension. Journal of experimental child psychology, 7, 1132-1145.

SMITH L.S., KEMLER D.G. (1977) Developmental trends in free classification: evidence for a new conceptualization of perceptual development. Journal of experimental child psychology, 24, 279-298.

SMITH L.S., KEMLER D.G. (1978) Levels of experienced dimensionality in children and adults. Cognitive psychology, 10, 502-532.

SUCHMAN R.G. (1966) Color-form preference, discriminative accuracy and learning of deaf and hearing children. Child development, vol. 37, n°2, 439-451.

SUCHMAN R.G., TRABASSO T. (1966) Color and form preference in young children. Journal of experimental child psychology, 3, 177-187.

SZEMINSKA A. (1976-1977) Conservations numériques. Bulletin de psychologie, Hommage à Jean Piaget, 369.

TAPONIER S., FLAMENT C. (1967) Analyse de la structure d'un matériel utilisé dans les expériences de tri. M.S.H., n°19.

THIRION A.-M. (1969) Etude expérimentale de la représentation spatiale chez l'enfant de 3 à 6 ans. Sciencia paedagogica experimentalis, vol.6, 121-183.

VERGNAUD G., COHEN R. (1969) Sur l'activité combinatoire des enfants de 8 ans. Psychologie française, 14, (4), 321-332.

VERGNAUD G. (1972) De la réponse commune à l'agèbre de Boole. L'année psychologique, 2, 379-390.

VERGNAUD G. (1981) _L'enfant, la mathématique et la réalité._, Berne-Francfort, Peter Lang.

VERGNAUD G. (1981)a. Jean Piaget: quels enseignements pour la didactique? _Revue française de pédagogie_, 57, 7-15.

VERGNAUD G. (1982) Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. _For the learning of mathematics_, 3,2, 31-41.

VERGNAUD G. (1983) Why is an epistemological perspective a necessity for research on mathematics education?_Proceedings of the 5th annual meeting,P.M.E. N.A._, Montreal,2-20.

VERGNAUD G. (1983)a. Psychology and didactics of mathematics in France: an overview. _Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik_, 2, 59-63.

VERGNAUD G. (1983)b. Let us discuss theory and methodology. _P.M.E._, Shoresh.

VERGNAUD G. (in press) Multiplicative structures. In: _Acquisition of mathematics concepts and processes_, Lesh R., Landau M. (Eds), Academic Press.

VERGNAUD G., ERRECALDE P. et al. (1980) Some steps in the understanding and the use of scales by 10-13 years old students. _Proceedings of the fourth international conference for the Psychology of Mathematics Education_, Berkeley, 285-291.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., RICCO G., MARTHE P., METREGISTE R., GIACOBBE J. (1978) _Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré._ A.T.P. "Processus et conditions de travail de l'élève".

VERGNAUD G., ROUCHIER A., DESMOULIERES S., LANDRE C., MARTHE P., RICCO G., SAMURCAY R., ROGALSKI J., VIALA A. (1983) Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à13 ans). _Recherches en didactique des mathématiques_, 4.1, 71-120.

VERGNAUD G., RICCO G., ROUCHIER A. (1978) Quelles connaissances les enfants de 6° ont-ils des structures multiplicatives? Un sondage. _Bulletin A.P.M.E.P._, 313, 331-357.

VERMERSCH P. (1976) _Une approche de la régulation de l'action chez l'adulte. Registres de fonctionnement, déséquilibre transitoire et microgenèse. Un exemple:_

l'analyse expérimentale de l'apprentissage du réglage de l'oscilloscope cathodique. Thèse de 3°cycle, Paris.

VIENNOT L. (1979) Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire. Paris, Hermann.

VINH BANG, LUNZER E. (1965) Conservations spatiales. E.E.G. XIX. Paris, P.U.F.

VINH BANG, GRECO P., GRIZE J.-B., HATWELL Y., PIAGET J., SEAGRIM G. N., VURPILLOT E. (1964) L'épistémologie de l'espace, Paris, P.U.F.

VURPILLOT E. (1972) Le monde visuel du jeune enfant, Paris, P.U.F.

VURPILLOT E., BERTHOUD M. (1969) Evolution génétique de la localisation dans un cadre de référence rectangulaire. L'année psychologique, 69, 393-406.

VURPILLOT E., MOAL A. (1970) Evolution des critères d'identité chez les enfants d'âge préscolaire dans une tâche de différenciation perceptive. L'année psychologique, 70, 391-406.

WILLATS J. (1977) How children learn to draw realistic pictures. Quaterly journal of experimental psychology, 29, 1-16.

YOKOCHI K. (1980) The child's concept of space and teaching of geometry, in particular for the children at the age from 4 to 7. Proceedings of the fourth I.C.M.E., Berkeley.

ZAZZO R., GILLY M., VERBA-RAD M. (1966) Nouvelle échelle métrique de l'intelligence, Paris, Armand Colin.

Annexe

DIMENSION(S), DIMENSIONNEL, DIMENSIONALITE

Bref panorama du statut de ces termes et leur histoire en mathématiques, en physique et en psychologie

Nous avons développé l'analyse d'acquisitions des enfants et adolescents dans le domaine cognitif que nous avons considérées comme relevant de l'appropriation d'une notion commune de "bi-dimensionalité". Nous avons étudié cette notion sur le produit cartésien dans le cas spécifique de la "combinatoire des dimensions", sur le repérage spatial fini rapporté à "deux dimensions" du plan, et sur la mesure des surfaces comme produit de deux dimensions "longueurs". Les termes de "dimensions" ainsi utilisés relèvent de champs scientifiques très différents ; il nous a semblé utile de faire un repérage minimum de leur signification, leur usage et leur origine dans ces différents champs.

Tout d'abord, un bref regard sur les définitions données dans trois dictionnaires qui sont de grands classiques : le LITTRE, le PETIT LAROUSSE ILLUSTRE, et le PETIT ROBERT, nous montre que seul le terme "dimension" apparaît, à l'exclusion de "dimensionnel" (sauf dans le Littré, comme néologisme) et de "dimensionalité". Ensuite, on peut relever la connotation quantitative toujours présente de "grandeur mesurée", et le peu de différenciation des usages présentés.

LITTRE : "Etendue d'un corps en tous sens. Les corps ont trois dimensions, longueur, largeur et profondeur. Avoir toutes les dimensions : être complet (étym. : mesure)".

PETIT ROBERT : La première utilisation du terme en français est signalée en 1425. La définition du terme "banalisé" est celle de "grandeur mesurable" ; les termes de référence sont "étendue, mesure, grandeur".

Pour la physique, l'utilisation citée (sans définition spécifique) est la suivante : "formule de dimensions : rapport de deux grandeurs dont dépend une autre grandeur (ex. : V = L/T)."

PETIT LAROUSSE ILLUSTRE : "Chacune des grandeurs nécessaires à l'évaluation des figures et solides". Math. : "chacune des grandeurs permettant de déterminer la position d'un point dans un espace donné". Physique : "chacune des grandeurs fondamentales (longueur, masse, temps, etc.) auxquelles peut se ramener toute grandeur physique. Quatrième dimension : le temps dans la théorie de la relativité".

Or, les termes de "dimensions", de "dimensionnel" apparaissent dans des textes de mathématiques, de psychologie, de physique en rapport - pour partie - avec notre travail.

Nous voulons dans notre étude - nécessairement succinte dans ce cadre - repérer l'éventuelle existence d'invariants dans la fonction conceptuelle de ces termes et les différences des significations qu'ils peuvent prendre dans des champs sémantiques différents.

L'existence d'invariants (ou une plausibilité suffisante de cette existence) donnerait un sens, au niveau épistémologique, du concept de "dimensionalité" introduit dans notre étude des acquisitions cognitives des enfants et adolescents.

L'origine première, attestée sur le plan éthymologique dans tous les dictionnaires est celle, latine, de "dimensio" issue de ou reliée au verbe désignant le fait de mesurer. Elle apparaît probablement dans le domaine de la géométrie, dans son sens premier de mesure de la terre. Jusqu'au 19ème siècle, il semble que ce terme de dimension soit réservé au domaine mathématique. Les différenciations de sens apparaissent à partir du 19ème en physique, et une évolution importante de signification se fait en mathématique à la fin du 19ème et dans les débuts du 20ème siècle avec les profonds changements de point de vue sur l'espace qui ont alors lieu (et dont une marque linguistique notable est le passage du pluriel : "dimensions" au singulier : "la dimension").

Nous allons présenter rapidement tout d'abord quelques points de repère sur le statut du terme "dimensions" des traductions françaises d'Euclide aux textes didactiques les plus diffusés dans la première moitié du 19ème siècle, puis des éléments sur l'introduction du terme en physique et sa fonctionalité, enfin nous situerons l'usage du terme "dimensions" en psychologie.

Nous terminerons par une hypothèse sur la dérivation de ce terme de la géométrie vers deux champs spécifiques ainsi éloignés que la physique et la psychologie.

1. "Les dimensions" en mathématiques

Jusqu'à la transformation profonde du statut de l'espace en mathématique à la fin du 19ème (1), les dimensions se réfèrent toujours à un espace représentant "naturellement" un espace physique auquel l'accès est transparent. Dans de nombreux textes

(1) Pour les évolutions de sens du terme "dimension" voir Bouligand, 1935.

didactiques ultérieurs, le pluriel réutilisé témoigne à notre avis de cette même référence implicite avec la représentation habituelle du point comme élément de l'espace, une multiplicité à 3 dimensions" (Klein, p. 7).

De la traduction d'Euclide à Legendre...

Dans "les quinze Livres des éléments d'Euclide", Henrion (1ere éd. 1627, 5ème éd. 1649), reprend ainsi les premières définitions d'Euclide (1).

"Le poinct est ce qui n'a aucune partie (..): Le poinct n'a donc aucunes des dimensions (2) géométriques, c'est-à-dire qu'il n'a longueur, largeur ny épaisseur, mais bien est-il principe d'icelles" ; "la ligne est une longueur sans largeur (..) puisque le poinct A par le coullement duquel elle est produite, est privé de toute dimension" (livre I, 1 et 2) ; "superficie est ce qui a longueur et largeur, tout seulement. Après la ligne, qui est la première espèce de quantité connue, et qui a une seule dimension, Euclide définit la superficie, qui est la seconde espèce de quantité, et a deux dimensions" (livre I, 5).

Plus loin (p. 486) Henrion établit un rapport entre la dimension en géométrie et en arithmétique :

"L'unité est selon laquelle une chacune des choses qui sont, est appelée une (..) Mais est à noter que tout ainsi qu'en la géométrie le poinct n'a aucune partie, étant indivisible, aussi es nombres l'unité ne reçoit aucune dimension" (Livre VII, déf.).

On voit ici une relation explicite entre dimensions dans l'espace et dimensions des nombres (explicitement évacuée plus tard de l'enseignement sur la multiplication, nous l'avons vu).

Cette même relation est reprise, voire élargie, chez Arnault bien qu'il transforme la présentation de la géométrie. D'une part il présente les mêmes définitions comme des "suppositions générales" sur des "connaissances naturelles" (celles de l'espace physique naturel) :

"(..) Je suppose en troisième lieu, que l'on scache que ce qu'on appelle corps, espace, étendue (car tout cela signifie la même chose) a trois dimensions, longueur, largeur et profondeur. Et que quand on les considère toutes trois, c'est alors que cette

---

(1) Il semblerait que le terme n'apparaisse pas dans le texte grec des livres correspondants d'Euclide.

(2) C'est nous qui soulignons l'apparition du terme dans les textes cités.

sorte de grandeur s'appelle proprement corps ou solide. Que quand on n'en considère que deux, sçavoir la longueur et la largeur, on l'appelle alors surface. Et que quand on n'en considère qu'une, sçavoir la longueur, on l'appelle alors ligne" (Arnault, 1667, p. 2).

D'autre part, il généralise les considérations sur les opérations et les notions mêmes à d'autres grandeurs :

"Je suppose en quatrième lieu que la multiplication et la division se peuvent appliquer à toutes grandeurs et non seulement aux nombres" (p. 3 ; il donne l'exemple : "multipliant longueur par largeur, lors qu'ayant 4 perches de long et 3 perches de large on dit il a 12 perches de surface)".

"Je suppose en cinquième lieu, que l'on se puisse mettre dans l'esprit que ce qu'on appelle les 3 dimensions dans les corps s'applique par accomodation à toutes les autres grandeurs et même aux nombres". (p. 3-4).

Avec l'exemple donné : 7 comme composé de 7 unités, 12 comme né de la multiplication de 3 par 4, 24 né de 2.3.4. on voit que le produit est explicitement lié à un changement de dimensions.

Le statut à la fois qualitatif et quantitatif de "dimensions" apparaît ainsi chez Arnault avec un large domaine de validité, qui comprend en particulier géométrie et arithmétique.

Plus tard, l'arithmétique - didactiquement séparée de la géométrie - sera présentée comme l'"étude des grandeurs" à savoir :

"tout ce qui est suscepbible d'être augmenté ou diminué" (1), mais c'est seulement (pour l'essentiel) en géométrie qu'apparaîtra le terme de "dimensions" (et nous avons vu qu'à la fin du 19ème l'enseignement en fin de primaire exclut clairement le produit de grandeurs des opérations arithmétiques). La présentation des éléments de géométrie gardera en revanche stable le statut spatial "naturel" des dimensions :

Ainsi Bezout commence ses "éléments de géométrie" par :

"l'espace que les corps occupent a toujours les trois <u>dimensions</u>, longueur, largeur et profondeur ou épaisseur. Quoique ces trois dimensions se trouvent toujours ensemble dans tout ce qui est corps, néanmoins nous les séparons assez souvent par la pensée (Bezout, 1771).

---

(1) Définition qui perdurera longtemps dans l'enseignement.

Le statut de l'abstraction, de là représentation mentale à l'oeuvre dans ce passage du réel à la géométrie (que l'on retrouvera sous d'autres formes en psychologie) n'est pas si fréquemment explicité. On le retrouve chez Sonnet (qui ne parle par ailleurs pas de dimensions) :

"La géométrie est la science qui traite de la forme des corps et de la mesure de l'étendue. Pour étudier la forme des corps, la géométrie fait abstraction de toutes leurs autres propriétés physiques, telles que le poids, la couleur, le degré de dureté ou de molesse, etc." (Sonnet, 1845, introduction, p. 1), mais Legendre - réédité tout au long du 19ème-prend pour acquis immédiats, introduits comme principes, la donnée des dimensions :

"La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur et hauteur".

Cette représentation de l'espace physique (qu'on en distingue ou non les propriétés "spécifiquement" spatiales) qui est une constante dans la présentation de la symétrie s'accompagne toujours d'une mise en relation des dimensions ; au rapport entre dimensions du point, de la ligne, de la surface et du volume. On peut en dégager - nous semble-t-il - un caractère relatif, comparatif - de la dimensionalité spatiale.

2. Les "dimensions" de la physique

Nous nous sommes référée pour les éléments qui suivent d'une part au travail de Hulin (1980) sur l'analyse dimensionnelle, d'autre part au bilan présenté dans l'Encyclopedia Universalis (pour laquelle une seule entrée se fait, au terme "dimensionnelles", concernant la physique, p. 636 - 642).

L'ancêtre de l'analyse dimensionnelle serait ainsi Fourier : dans son traité de la chaleur il est conduit à des raisonnements sur les dimensions et à l'analyse dimensionnelle. La chaleur apparaît comme une quantité particulière par rapport au "calorique", une grandeur à part, et cela amène Fourier à définir ces dimensions (Fourier, 1822). C'est à Maxwell (Maxwell, 1871) que l'on devrait la notation traditionnelle pour les équations aux dimensions, avec les symboles [ ].

Fondamentalement, c'est le débat sur le choix des unités, et sur la coordination des choix pour plusieurs grandeurs physiques, qui a conduit à la notion de "dimensions" telle qu'elle fonctionne en physique (à propos toujours de rapports entre grandeurs, et unités, même si ces rapports ne sont pas toujours explicites). Ce débat fait évidemment intervenir le nombre, la quantification d'une grandeur par rapport à une unité.

Selon Danloux-Dumesnil (1962, p. 35) ce serait Gauss, vers 1820-1825 (donc parallèlement à Fourier) qui avance l'idée. nouvelle alors dans la pratique scientifique. d'un système de dérivation cohérente des unités des différentes grandeurs à partir de quelques unes prises comme fondamentales.

"Ce qui caractérise la formalisation en physique, c'est que les relations quantitatives entre mesures de grandeurs physiques doivent impérativement être précisées par la donnée, d'un groupe de changement d'unités, définissant les "dimensions" de ces grandeurs.. ("L'ensemble G des grandeurs homogènes à g est appelé leur dimension" (Hulin, 1980).

Dans la signification du terme "dimensions" ce n'est pas la grandeur physique qui apparaît centrale mais les groupes de changements d'unités.

Si l'on retrouve comme point commun avec les "dimensions" de la géométrie un caractère relatif, on est loin du caractère "transparent" de la représentation en physique. Comment se serait alors effectuée une dérivation de sens du terme "dimensions" de la géométrie à ce sens, issu de problèmes scientifiques n'allant nullement de soi ? Nous hasardons une hypothèse : dans les discussions autour de 1800, et au-delà, sur les choix d'unités internationales, la mesure des longueurs a un statut privilégié, fonction à la fois de son ancienneté et de la précision déjà alors acquise sur les mesures effectuées, bénéficiant peut-être aussi idéologiquement de son statut "naturel" lié à la terre elle-même. Ce "privilète" rendrait compte du fait que le débat sur les unités physiques appuiera son vocabulaire de "dimensions", sur l'utilisation de ce terme lié à la mesure spatiale des corps, avec des unités pour la longueur, la surface et le volume en rapport déjà explicite les unes avec les autres : mètre, mètre carré, mètre cube.

L'aspect "quantitatif" des dimensions paraît donc décisif dans la signification de ce terme en physique, et dans une "dérivation" à partir des dimensions spatiales.

3. Les "dimensions" en psychologie

En psychologie, le terme "dimensions" peut être considéré comme récent, puisqu'il a été introduit seulement en 1952, par Hovland, dans le cadre de recherches théoriques sur l'apprentissage de concepts, d'inspiration behaviorisme. Dans son article "A Communication analysis of concept learning" (Hovland, 1952) où Hovland se réfère à la théorie de l'information, il représente des ensembles d'objets dans une disposition spatiale tridimensionnelle comme produit de dimensions.

Hunt, qui publie en 1962 un ouvrage formalisant en langage ensembliste les notions théoriques de l'"apprentissage de concepts", situe indirectement la place que le terme "dimensions" occupe par rapport à d'autres utilisés dans un même cadre théorique :

"Hovland développed a system of notation in which objects where characterized by values on dimensions. Movland's system was promptly adopted for experiments in concept learning" (Hunt, 1972, p. 20).

Il précise plus loin :

" After Bruner, Goodnow and Austin (1956) the term of attribute is often substituted for dimension". Il fait également référence à la description différente de Restle, qui pour une "dimension" (selon Hovland) utilise le terme de "variable". Pour sa propre formalisation en terme ensembliste, Hunt en établit l'origine (p. 46, note) : "the idea of defining dimensions and values by sets occured to the author after reading a research report by Koche (1960)".

La formalisation ensembliste ne va pas pour autant supplanter l'usage des termes antérieurs. En fait la terminologie utilisée pour décrire des "matériels expérimentaux" n'est pas fixée, y compris pour un même auteur, qu'il s'agisse d'orientations théoriques "anglo-saxonnes" (behavioristes et néobehavioristes), d'auteurs plus proches des théories piagétiennes, ou de chercheurs préoccupés de formalisation méthodologique.

Chez Piaget lui-même, le terme de "dimension" apparaît seulement dans un contrôle spatial : à propos de classifications il parle de "matrice à deux dimensions" (Piaget et Inhelder, 1959, p. 154) relève à propos de conservation que "l'enfant ne considère encore qu'une dimension (la longueur) et néglige totalement l'autre" (Piaget, 1964, p. 177). Pour le reste, il parle à propos des classifications multiples-dont il étudie les tâches d'acquisition chez les enfants et adolescents - de caractères, de quantités ou de critères.

G. Pieraut-Le Bonniec, étudiant le développement de l'abstraction chez le jeune enfant utilise les termes d'indice, propriétés, catégories, critères, concepts (Pieraut - Le Bonniec, 1977, p. 216-217).

P. Fraisse utilise le terme "dimensions" à propos du test d'Haufmann-Kasanin (classification de 22 blocs de couleur, forme, hauteur et surfaces différentes) : "la bonne réponse (..) exige qu'il (le sujet) forge des concepts à 2 dimensions..." (Fraisse, 1967, p. 61) mais il ne formalise nulle part une description en terme de "dimensions".

Dans un travail de formalisation Lépine utilise les termes de caractéristiques (pour la forme et la couleur) avec des niveaux (Lépine, 1966) ; avec Rouanet ils parlent d'attributs et de descripteurs (Lépine et Rouanet, 1967). Cependant, dans un autre article, ils analysent le matériel expérimental selon la dimension (la couleur, par exemple) ou l'attribut (une lettre) avec, dans les deux cas, des modalités (rouge par exemple) (Lépine et Rouanet 1969-70). L. Richard parle de même de la notion d'attribut ou de dimension" (Richard, 1974).
Ce terme de dimension n'apparaît d'ailleurs pas dans le Vocabulaire de Psychologie de H. Piéron (revu en 1975 par Bresson et Durup), pas plus que les (néologismes) dérivés : dimensionnel et dimensionalité, signe de sa non-institutionnalisation.

Si le terme de "dimensions" apparaît sans doute davantage dans des textes anglo-saxons, il reste là aussi en concurrence avec d'autres. Par exemple R. G. Suchman qui analyse la préférence entre les dimensions de "stimulus perceptuels" utilise aussi bien l'expression "form-dimension" que l'expression "form-vue" (R.G. Suchman, 1966). A.L. Brown utilise "dimensions" comme terme dominant, mais aussi "component" (Brown, 1970).

Vergnaud a proposé une classification des tâches pour distinguer sur le plan notionnel différents termes utilisés souvent comme équivalents. Nous pensons que l'existence des différences fonctionnelles qu'il met en avant explique ces variations empiriques dans les termes. Nous estimons également que les rapports internes qui existent entre les "ensembles" considérés par les auteurs comme composés de façon multiplicative doivent être considérés comme élément de différenciation des termes utilisés.

Les termes dérivés, dimensionnel, unidimensionnel, bi-dimensionnels, apparaissent en revanche d'un usage plus stable, et sans concurrents linguistiques majeurs :

"the <u>dimensional</u> choices (..) such that individual children's preferences are consistent and primiraly unidimensional" (R.G. Suchman, 1966) ; "subjects learned 120 <u>two-dimensional</u>(..) concepts identification problems" (Millward, 1968) ; "<u>dimensional</u> preference is revealed (..) in greater ease of <u>intradimensional</u> shift" (Brown, 1970) ;

"(les conduites qui consistent) à éliminer les objets qui ne possèdent pas l'une des deux propriétés (..) sont le résultat de la même opération <u>unidimensionnelle</u>" (Maury, 1966) ; "ces concepts sont unidimensionnels simples.." (Lépine 1969-70).
De même, Richard (Richard, 1974) parlera de "stimulus unidimensionnels", de "concepts unidimensionnels" et de "règles de renrenforcement unidimensionnelles". Vergnaud l'utilise dans un autre champ à propos des conceptions qu'ont les enfants sur le volume, opposant les conceptions "unidimensionnelles" (le volume est simplement une quantité), aux conceptions <u>tri-</u>

<u>dimensionnelles</u> correctes (le volume est un produit de 3 longueurs) (Vergnaud, 1983).

L'usage en psychologie du terme "dimension" et de ses dérivés est donc loin d'être invariant selon les questions et les orientations de recherche..Cependant, une dominante existe : c'est le rapport de ce terme avec la structuration d'un matériel expérimental en produit cartésien et de la représentation spatiale de celui-ci.

Le passage par analogie des dimensions de la représentation spatiale (voir Hovland) à la description en termes de dimensions de ce qui est représenté s'appuie sur les propriétés communes, au niveau de la structure, du modèle ensembliste du produit cartésien et de celle du plan (ou de l'espace).

Le caractère qualitatif du terme originel dominerait ainsi dans le statut du terme "dimensions" en psychologie (1), à la différence de la physique où le caractère quantitatif apparaît explicite.

4. <u>En conclusion</u>

A partir de l'utilisation "géométrique" - quantitative et qualitative - du terme "dimensions", il semble s'être produit une double dérivation dans deux champs scientifiques différents : - en physique, au 19ème siècle avec constitution d'une analyse dimensionnelle, théorie des changements d'unités des différentes grandeurs physiques - en psychologie dans la seconde moitié du 20ème siècle, en relation avec une modélisation ensembliste du matériel utilisé dans le domaine de l'apprentissage de concepts.

Ces dérivations présentent à la fois des différences évidentes et des éléments communs. En physique, le terme de "dimensions" réfère à la fois à l'organisation qualitative du système des grandeurs et aux relations quantitatives des changements d'unités Nous retrouvons là un point présent dans le statut du terme géométrique (précédant cette "dérivation").

En psychologie le seul caractère qualitatif de la structure multiplicative est présent dans l'usage du terme de "dimensions".

Si, pour l'un et l'autre domaine, l'espace a constitué un premier "modèle" c'est de façon fort différente : ce sont les mesures

(1) Mais ne doit-on pas signaler ici que le passage d'un domaine (la géométrie) à un autre (la psychologie) s'est fait au moment de la pleine vitalité du structuralisme...

spatiales qui ont permis/provoqué le passage par analogie de l'espace aux grandeurs physiques ; c'est la représentation spatiale (bi ou tridimensionnelle) du produit cartésien qui est à l'origine de la "dérivation" des "dimensions" en psychologie. Le statut institutionnel du terme "dimensions" est également fort différent. Les invariants n'en existent pas moins : d'une part la référence et/ou le rôle privilégié de l'espace, d'autre part la structure multiplicative sous-jacente dans l'un et l'autre cas, se traduisant dans les calculs ou les dénombrements par des opérations numériques de même nature. Dans le cas des dimensions en physique, comme dans celles en psychologie un autre élément commun important est le caractère relatif de cette notion : il y a problème de dimension à partir du moment où plusieurs dimensions doivent simultanément être distinguées et coordonnées.

L'existence d'un terme commun à plusieurs domaines scientifiques, de relations étroites entre eux à travers une relation privilégiée avec la représentation spatiale, l'existence d'invariants dans les problèmes d'analyse et de coordination des dimensions, l'existence d'une même structure multiplicative lorsqu'on se projette dans le domaine numérique, nous conduisent à considérer comme pertinente la notion de dimensionalité relative utilisée à propos des champs conceptuels de la combinatoire, du repérage plan, des mesures spatiales.

Au-delà, il serait intéressant d'étudier de façon approfondie l'acquisition de cette notion de "dimensions" pour un ensemble significatif de domaines de la physique, et d'analyser le statut de l'enseignement dans cette acquisition : il y a là une voie de travail commune à la didactique des mathématiques et de la physique, convergeant avec celle de l'étude du développement cognitif en rapport avec les différents contenus de connaissance.

A.P.M.E.P. (1982) Mots. Tome VI, Grandeur, mesure. Brochure n°46.

ARNAULT A. (1667) Nouveaux éléments de géométrie, Paris, C.Savreux.

BEZOUT (1771) Cours de mathématiques, à l'usage des gardes du pavillon et de la marine; seconde partie, Paris, J.J.G. Musier.

BOULIGAND G. (1935) Les définitions modernes de la dimension, Exposés d'analyse générale V, Actualités scientifiques et industrielles, Paris, Hermann.

DANLOUX-DUMESNILS M. (1962) Etude critique du système métrique, Paris, Gauthier-Villars.

FOURIER J. (1822) Théorie analytique de la chaleur, Paris.

FRAISSE P. (1967) La psychologie expérimentale. Paris, P.U.F.

HENRION D. (1649) Traduction des quinze livres des Eléments d'Euclide. (5°édition).

HOVLAND C.I. (1952) A "communication analysis" of concept learning. Psychological review, 59, 461-472.

HULIN M. (1980) Analyse dimensionnelle, Université Paris VI.

HUNT E.B. (1962) Concept learning: an information processing problem. New-York, Wiley and Sons.

JAEGLE P. (1976) Essai sur l'espace et le temps. Paris, Editions Sociales.

KEMLER D.G. (1982) The ability for dimensional analysis in preschool and retarded children: evidence from comparison, conservation and prediction tasks. Journal of experimental child psychology, 34, 3, 469-489.

KLEIN F. (1872) Le programme d'Erlangen. réedition 1974, Paris, Gauthier-Villars.

LACROIX S.-F. (1812) Compléments des éléments de géométrie, Paris, Veuve Courcier, (4° édition).

LEGENDRE (1817) Eléments de géométrie, Paris, Firmin

Didot, (11° édition); (1883) 27°édition, revue par Blanchet.

LEPINE D. (1966) Critères de la réponse d'"identité" chez l'enfant. L'année psychologique, 66,2, 417-446.

LEPINE D. (1969-1970) Information positive et information négative dans l'apprentissage de concepts unidimensionnels simples. Bulletin de psychologie, XXIII, n°1-3.

LEPINE D., ROUANET H. (1967) La formalisation algébrique des situations d'identification de concept. L'année psychologique, 67, 2, 513-532.

MAURY L. (1966) Approche généntique de la notion de complément logique. Journal de psychologie normale et pathologique, 3.

MAXWELL (1871) Proceedings of London society, vol.3, 34.

MILLWARD R.B. (1968) Probabilistic reinforcement of reversal and dimensional shifts. Journal of mathematical psychology, 5, 196-228.

PIAGET J. (1964) Six études de psychologie. Genève, Gautier.

PIAGET J., INHELDER B. (1959) La genèse des structures logiques élémentaires. Paris-Neuchatel, Delachaux et Niestlé.

PIERAUT-LE BONNIEC G. (1977) Développement des capacités d'abstraction chez le jeune enfant de 2;0 à 5;0. Archives de psychologie, XLV, 175, 205-223.

PIERON H. (1973) Vocabulaire de la psychologie, Paris, P.U.F., (5° édition, revue et corrigée par BRESSON F. et DURUP G.).

RICHARD J.-F. (1974) Attention et apprentissage. Paris, P.U.F.

RICHARD J.-F., LEPINE D., ROUANET H. (1969) Première étude d'un modèle général d'identification de concepts unidimensonnels. Congrès international de psychologie, Londres.

SONNET H. (1845) Premiers éléments de géométrie, Paris, Hachette.

SUCHMAN R.G. (1966) Color-forme preference, discriminative accuracy and learning of dead and hearing children. Child development, vol.37, n°2.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., DESMOULIERES S., LANDRE C., MARTHE P., RICCO G., SAMURCAY R., ROGALSKI J., VIALA A. (1983) Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). Recherches en didactique des mathématiques, 4.1, 71-120.

VLOEBERGH A. (1983) Le mastermind et ses stratégies. La recherche, 142, 403-405.